



EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

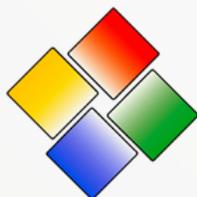


DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN
TECNOLÓGICA INDUSTRIAL Y DE SERVICIOS

Probabilidad y Estadística

Segunda Edición

Aprendizajes Esenciales
febrero-julio de 2021



**Academia Nacional
de Matemáticas**



Manual del alumno

In memoriam

Un maestro afecta la eternidad; solo él puede decir donde para su influencia.

Henry Adams

En homenaje a nuestros queridos amigos

**Armando Rosas Zepeda
Justino Maza Román
Nelson Gutiérrez Valdés
Ramón Figueroa Saucedo**



Índice

Índice	2
Encuadre	8
Propósito	8
Marco teórico	8
Marco referencial	9
Características del curso	9
Recomendaciones para la impartición del curso	11
Competencias a desarrollar en el curso	12
Introducción	13
Justificación	14
Bloque 1 Manejo de la información	15
1.1 Definición de Estadística	15
1.1.1 Campo de estudio.	15
Actividades de Apertura	15
Actividades de Desarrollo	16
1.1.2 Antecedentes históricos.	17
Actividades de cierre.....	19
1.2 Población, muestra y tipos de variables.	19
Introducción	19
Actividades de Apertura	20
Actividades de Desarrollo	20
1.2.1 Población	20
1.2.2 Muestra	20
1.2.3 Tipos de variables	21
Actividades de cierre.....	23
1.3. Niveles de medición de variables	24
Actividades de Apertura	24
Actividades de Desarrollo	24
1.3.1. Nominal	24
1.3.2. Ordinal.....	24
1.3.3. De intervalo	24
1.3.4. De razón.....	25
Actividades de cierre.....	26





1.4 Frecuencias.....	27
Introducción	27
Actividades de Apertura.....	27
1.4.1. Frecuencia Absoluta (acumulada)	27
1.4.2. Frecuencia Relativa (acumulada)	27
Actividades de Desarrollo	28
Actividades de cierre.....	29
Actividades de contexto o Transversales	30
1.5 Tablas de Distribución de Frecuencias	32
1.5.1 Elementos	32
Introducción	32
Actividades de Apertura.....	32
Actividades de Desarrollo	34
Actividades de cierre.....	43
Ejercicios Adicionales	49
1.6 Representación gráfica e interpretación.	50
Introducción	50
Actividades de Apertura.....	50
Actividades de Desarrollo	50
1.6.1. Histograma.....	50
1.6.2. Polígono de Frecuencias.....	53
1.6.3. Ojiva.....	54
1.6.4. Gráfico Circular, de sectores o Pastel.....	55
Actividades de cierre.....	58
Ejercicios Adicionales	58
Bloque 2 Medidas de tendencia central	60
2.1 Media	60
Introducción	60
2.1.1. Media aritmética.....	60
2.2 Mediana y Moda.....	62
2.2.1 Mediana	62
2.2.2 Moda	64
Actividades de Apertura.....	67
Actividades de Desarrollo	68
Actividades de cierre.....	68
Ejercicios Adicionales	69





2.3 Cuartiles, Deciles y Percentiles.....	71
Introducción	71
2.3.1. Cuartiles	71
2.3.2 Deciles	72
2.3.3 Percentiles	72
Actividades de Apertura	75
Actividades de Desarrollo	76
Actividades de cierre.....	76
Actividades de contexto o Transversales	77
Ejercicios Adicionales	78
Bloque 3 Medidas de dispersión	80
3.1 Rango	80
Introducción	80
Actividades de Apertura	82
Actividades de Desarrollo	82
Actividades de cierre.....	83
Actividades de contexto o Transversales	84
Ejercicios Adicionales	85
3.2 Desviación media	85
Introducción	85
Actividades de Apertura	86
Actividades de Desarrollo	86
Actividades de cierre.....	87
Actividades de contexto o Transversales	88
Ejercicios Adicionales	88
3.3 Varianza y desviación típica o estándar	89
Introducción	89
3.3.1 Varianza.....	89
3.3.2 Desviación típica o estándar	90
Actividades de Apertura	90
Actividades de Desarrollo	91
Actividades de cierre.....	92
Actividades de contexto o Transversales	92
Ejercicios Adicionales	93
Bloque 4 Medidas de forma	95
4.1 Sesgo.....	95





Introducción	95
Actividades de Desarrollo	95
4.2 Apuntamiento o curtosis	96
Actividades de cierre.....	97
Bloque 5 Medidas de correlación	98
5.1 Coeficiente de correlación.....	98
Introducción	98
Actividades de Apertura.....	98
Actividades de Desarrollo	98
Actividades de cierre.....	101
Ejercicios Adicionales	102
5.2 Recta de regresión	105
Introducción	105
Actividades de Apertura.....	105
Actividades de Desarrollo	105
Actividades de cierre.....	107
Ejercicios Adicionales	107
5.3 Error estándar de estimación	111
Introducción	111
Actividades de Apertura.....	111
Actividades de Desarrollo	111
Actividades de cierre.....	112
Ejercicios Adicionales	112
Bloque 6 Teoría de conjuntos.....	114
6.1 Elementos básicos	114
6.1.1 Diagrama de Venn-Euler.....	114
Introducción	114
Actividades de Apertura.....	114
Actividades de Desarrollo	114
Actividades de cierre.....	115
6.1.2 Conjunto.....	115
Introducción	115
Actividades de Apertura.....	116
Actividades de Desarrollo	116
Actividades de cierre.....	117
6.1.3 Subconjunto	118





Introducción	118
Actividades de Apertura.....	118
Actividades de Desarrollo	118
Actividades de cierre.....	119
6.1.4 Pertenencia.....	120
Introducción	120
Actividades de Apertura.....	120
Actividades de Desarrollo	121
Actividades de cierre.....	121
6.1.5 Conjunto universo	122
Introducción	122
Actividades de Apertura.....	122
Actividades de cierre.....	122
Introducción	123
Actividades de Apertura.....	123
Actividades de Desarrollo	123
Actividades de cierre.....	123
6.2 Operaciones con conjuntos	124
6.2.1 Unión.....	124
Introducción	124
Actividades de Apertura.....	124
Actividades de Desarrollo	124
Actividades de cierre.....	125
6.2.2 Intersección.....	126
Introducción	126
Actividades de Apertura.....	126
Actividades de Desarrollo	126
Actividades de cierre.....	127
6.2.3 Complemento.....	128
Introducción	128
Actividades de Apertura.....	128
Actividades de cierre.....	129
6.2.4 Diferencia.....	130
Introducción	130
Actividades de Apertura.....	130
Actividades de Desarrollo	130
Actividades de cierre.....	131





6.3 Representación de operaciones mixtas con hasta tres conjuntos	132
Introducción	132
Actividades de Apertura	132
Actividades de Desarrollo	132
Actividades de cierre.....	134
Bloque 7 Técnicas de Conteo	135
7.1 Elementos básicos	135
Introducción	135
Actividades de Apertura	135
Actividades de Desarrollo	136
Actividades de cierre.....	137
7.1.2. Espacio muestral, evento y diagrama de árbol	137
Introducción	137
7.2 Principio fundamental de la multiplicación.....	139
Introducción	139
7.3 Principio fundamental de la suma	142
7.3.1 Notación factorial	144
Actividades de Apertura.....	144
7.4 Combinaciones y Permutaciones	145
Actividades de Desarrollo	145
Actividades de cierre.....	146
7.4.1 Permutaciones	147
Actividades de Apertura.....	147
Actividades de Desarrollo	147
Actividades de cierre.....	148
7.5 Teorema de Bayes	149
Introducción	149
Actividades de Apertura.....	150
Actividades de cierre.....	151
Fuentes consultadas	153
Directorio	154
Academia Nacional de Matemáticas	155





Encuadre

Propósito

Desarrollar las competencias necesarias para el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes de Bachillerato Tecnológico, en los planteles de la DGETI de la República Mexicana, y que le permita lograr el perfil de egreso que exigen los nuevos tiempos, enfrentando la contingencia actual por el SARS-CoV-2 en su permanencia en casa. Cada manual está diseñado, principalmente, para los alumnos con falta de recursos y/o conectividad para que puedan seguir con sus clases desde casa, así mismo, es muy práctico para trabajar con los alumnos que si cuentan con los recursos para llevar sus clases en línea, y como apoyo al docente titular de las asignaturas para propiciar en el alumno, aún en la distancia, el interés de dirigir su automotivación hacia el aprendizaje autodidacta de los contenidos de los programas de estudio vigentes de las asignaturas de Matemáticas de bachillerato en el plan nacional educativo, a través de la construcción de su propio conocimiento y la aplicación pertinente de ellos en su contexto personal y su vida cotidiana desde una óptica crítico-analítica del pensamiento individual.

Marco teórico

Los seres humanos somos capaces de conocer el mundo a través del lenguaje, del análisis lógico-matemático, de la representación espacial, del pensamiento musical, del uso del cuerpo para resolver problemas o hacer cosas, de la propia interpretación del universo, a interrelación con los demás individuos y de una auto comprensión de nosotros mismos. Donde los individuos se diferencian en el nivel e intensidad de sus habilidades y en las formas en que recurre a esas mismas y se les combina para llevar a cabo diferentes labores, para solucionar diversos problemas y progresar en distintos ámbitos.

Las personas aprenden, representan y utilizan el saber de muchos y diferentes modos, estas diferencias desafían al sistema educativo, que hoy en día lucha por contraponerse a las ideas erróneas de que todo el mundo puede aprender los mismos conocimientos, las mismas disciplinas y del mismo modo y que basta con una medida uniforme y universal para poner a prueba el aprendizaje de los alumnos.

Los procesos de aprendizaje de las matemáticas requieren de estrategias que permitan al alumno que las competencias que son adquiridas en la escuela se sitúen en un ambiente cotidiano para relacionar, interpretar inferir y aplicar los saberes a la resolución de problemas.

El desarrollo de habilidades, destrezas y actitudes se relaciona directamente con las condiciones que se deben dar para lograr que los aprendizajes en el estudiante sean significativos y lo más funcional posible.

El proceso de evaluación de las competencias consiste en utilizar los medios que permitan a los alumnos reconocer si los esquemas de actuación aprendidos le son de utilidad, a tal grado que le sirvan para intervenir correctamente ante una situación problemática planteada en la cotidianidad.





Marco referencial

Al analizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es posible percatarse que los alumnos han experimentado una serie de estrategias por parte de los docentes para que las competencias las transfieran en situaciones de la vida real. Esto exige relacionar, interpretar, inferir, interpolar, inventar, y aplicar los saberes a la resolución de problemas, mediante la intervención en la realidad reflexionando y actuando sobre la acción y reaccionando con responsabilidad ante situaciones imprevistas o contingentes.

El aprendizaje por competencias está directamente relacionado con las condiciones que deben darse para que los aprendizajes sean los más significativos, situados y funcionales posibles.

La evaluación del aprendizaje de competencias responde a la evaluación de contenidos; pero no toda la evaluación está referida a ello. Si consideramos que la evaluación es un aspecto complejo donde convergen diferentes dimensiones, entonces debemos considerar que están implicados procesos de evaluación también complejos.

El proceso de evaluación de las competencias consistirá en utilizar los medios que permitan reconocer si los esquemas de actuación emprendidos por el estudiante pueden serle de utilidad para superar situaciones reales en contextos concretos lo más aproximados a la realidad; para evaluarla es necesario tener datos fiables sobre el grado de aprendizaje de cada estudiante con relación a la competencia implicada, para ello se requiere el uso de instrumentos y medios diversos en función de las características propias de cada competencia y los distintos contextos donde ésta debe o puede llevarse a cabo.

Dado que las competencias están constituidas por uno o más contenidos de aprendizaje, es necesario identificar los indicadores de logro para cada uno de ellos, pero integrados o que se puedan integrar en la competencia correspondiente y el medio para conocer el grado de su aprendizaje será la intervención del estudiante ante la situación problemática planteada. La evaluación bajo el enfoque de competencias no solo implica evaluar el resultado del aprendizaje del alumno, también el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que conlleva a que en paralelo también el facilitador va desarrollando, aprendiendo y evaluando bajo el enfoque de competencias, su propia praxis educativa.

Características del curso

El curso tal y como aparece en este manual, pretende abarcar los aprendizajes esenciales que le sean útiles al alumno del semestre correspondiente de bachillerato, en los horarios asignados por las autoridades directivas de cada plantel a los titulares de la asignatura. La modalidad del curso es a distancia, es decir, utilizando las herramientas digitales que le permitan al docente comunicarse en el marco de la presente contingencia por la pandemia e interactuar con sus alumnos no teniéndolos presentes físicamente. No obstante, considerando que existen alumnos que no cuentan con los recursos y/o conectividad para sus clases en línea, este manual va dirigido a ellos principalmente.

Los manuales están estratégicamente diseñados para propiciar un aprendizaje autodidacta para quienes no cuentan con los recursos y/o conectividad, así como la participación activa de quienes llevan sus clases en la modalidad en línea, la cual implica un compromiso entre el facilitador y los alumnos para alcanzar los objetivos del curso. Asimismo, las etapas de apertura, desarrollo y cierre, así como las actividades de contextualización y transversalidad y el tipo de ejercicios, permitirá crear las condiciones para estimular un trabajo en el que prevalezca la intención comprometida de cada uno de los participantes, para analizar y extraer las características más relevantes de las situaciones





problemáticas; discutir y encontrar formas de solución de los problemas y elegir, entre ellas, las más eficaces, así como fundamentar, en todo momento, el porqué de la estrategia de solución.

Un escenario de este tipo pretende crear las condiciones que propician aprendizajes significativos desde la distancia, donde lo más importante radica en ser consciente de lo que se hace y para qué se hace, y no sólo de solucionar el problema. En esta perspectiva, el docente está comprometido a supervisar de manera permanente el trabajo de sus alumnos, orientar y retroalimentar los contenidos que se requieran en plenarios, o en especial individualización, respetando los procesos de discusión y los argumentos que conduzcan al entendimiento y solución de los ejercicios, atender las dudas individuales y propiciar, siempre, la participación activa y comprometida de los estudiantes. Asimismo, el titular deberá realizar las siguientes actividades:

1. Al inicio del curso, el facilitador creará la herramienta digital que considere pertinente (Zoom, Google Meet, Classroom, WhatsApp, correo electrónico, etc.) y cerciorarse que esté incluida la totalidad de sus alumnos en sus grupos escolares correspondientes.

2. Ya creados los grupos digitales, realizar una dinámica para tratar de conocer a sus alumnos y explicar los objetivos del curso, duración, desarrollo, evaluación y compromisos que se adquieren al asistir al mismo.

3. Podrá hacer uso de la metodología del aula inversa a través de videos que ilustren el desarrollo de las actividades a realizar en cada sesión del curso. Dichos videos han sido seleccionados de la plataforma *Khan Academy* y *YouTube* y serán analizados por los alumnos el día anterior como una actividad extra clase a la sesión correspondiente de cada uno de los temas.

4. Apertura de sesiones. Se recomienda que la apertura se realice con el pase de lista y la resolución de la tarea diaria. Retroalimentando los errores identificados y aclarando dudas.

5. Cierre de sesiones. El cierre se realizará con una pregunta y los comentarios que de ella se deriven. Las preguntas pueden ser: ¿Qué aprendimos el día de hoy? ¿Cuál fue el error más grave que cometimos y cómo lo resolvimos?, entre otras.

6. Asesoría y seguimiento del desempeño de alumnos en la resolución de ejercicios para el aprendizaje y habilidad matemática, marcando un tiempo para su realización individual, al término del cual se preguntará quiénes han concluido, socializando en plenaria las soluciones.

7. Incluir en clase los Retos Transversales y las lecciones Construye T correspondientes a la asignatura y desarrollarlos, considerando una calificación ponderada formativa y sumativa.

8. Considerando la situación especial de contingencia por la pandemia del Covid 19, se podrá omitir la coevaluación y autoevaluación de los alumnos. Al término del curso, el docente evaluará en una escala de 0 a 10, los siguientes aspectos:

- Cumplimiento de los objetivos del curso.
- Dominio de los contenidos.
- Cumplimiento individual de las tareas, trabajos y evaluaciones en tiempo y forma. (Salvo casos especiales y no conectados)



9. Esta obra se hará llegar a los alumnos por los medios que dispongan en el contexto de cada región del país, tratando de abarcar la totalidad de la población de estudiantes de la DGETI. Para ello, en los planteles se establecerán los mecanismos para que se lleve a cabo una interacción favorable entre maestros y alumnos, a fin de dar seguimiento a los avances que tengan los jóvenes y establecer los criterios de evaluación que se consideren viables de acuerdo con las circunstancias de cada región, en el marco de la contingencia actual.

Recomendaciones para la impartición del curso

Este material contempla en su estructura una serie de estrategias didácticas y ejercicios con un grado de complejidad gradual ascendente, cuyo principal propósito es que los procedimientos para su resolución y respuestas sirvan de parámetro a todos los involucrados en el proceso educativo, para emitir una opinión basada en el análisis de su alcance e importancia de desarrollarse siguiendo un razonamiento lógico-matemático.

Debido a la trascendencia académica del curso sugerimos tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. Los ejercicios tienen un grado de complejidad ascendente, por lo que es recomendable que el docente informe a los alumnos sobre el impacto que tiene cada habilidad en el aprovechamiento escolar; de igual forma es pertinente que si observa en el grupo dificultades en alguna habilidad la ejercite hasta que se domine, o en su defecto, brinde la oportunidad al estudiante de desarrollarla en otro espacio (plataforma Khan Academy, por ejemplo), o la estrategia que el considere pertinente.
2. El docente podrá grabar sus propios videos explicativos, proporcionar links de videos y textos explicativos de los temas, tutoriales, etc. con el propósito de que el estudiante tenga los recursos suficientes para la adquisición de las competencias y aclaración de posibles dudas en los contenidos.
5. Proporcionar al alumno y si es posible a los padres de familia (grupo de Whats App), los aspectos a considerar en la evaluación y su promedio parcial y final a tiempo para que tenga oportunidad de prepararse y regularizarse, de ser necesario.
6. Se debe tener consideración y empatía con aquellos alumnos que no tengan el recurso de conectarse diariamente y tratar de localizarlos con medios que estén al alcance de sus posibilidades y dándoles la oportunidad de trabajar o regularizarse en las condiciones que le favorezcan. Como, por ejemplo, ponerse de acuerdo en entregar tareas o evaluaciones en un punto de reunión física, por excepción y siguiendo las consideraciones de la contingencia.



Competencias a desarrollar en el curso

COMPETENCIA	ATRIBUTOS
<p>1. Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.</p>	<p>1. Enfrentan las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.</p>
	<p>2. Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.</p>
<p>4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos, mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.</p>	<p>1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.</p>
	<p>2. Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en que se encuentra y los objetivos que persigue.</p>
<p>5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.</p>	<p>1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.</p>
	<p>6. Utiliza las TIC para procesar e interpretar información.</p>
<p>8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.</p>	<p>2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.</p>
	<p>3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos grupos de trabajo.</p>



Introducción

Debido a la presente prolongación del confinamiento social por la pandemia del SARS-CoV-2, una vez más las autoridades de la Secretaría de Educación Pública de México, han optado por la apertura de las clases a distancia en todos los niveles educativos, aprovechando los medios electrónicos actuales para que los docentes puedan desarrollar su cátedra de manera digital, teniendo comunicación con sus grupos de alumnos y así poder desarrollar las estrategias pertinentes que le permitan al estudiante alcanzar, en lo mayor posible, las competencias establecidas en los planes y programas de estudio nacionales.

Este manual representa la segunda edición (el primer manual fue generado de manera emergente por la Academia Nacional de Matemáticas, al iniciar la suspensión de clases presenciales en el país, en marzo del 2020 y se enfocó en su momento en cubrir los aprendizajes esenciales del segundo y tercer periodo parcial del semestre que quedaban pendientes, ya que el primer parcial se alcanzó a realizar de manera presencial en las aulas). Para ésta edición se incorporan las actividades propuestas para el primer periodo parcial, determinados por la Academia Nacional de Matemáticas, con el propósito de establecer los Aprendizajes Esenciales que se requieren de ésta asignatura en la formación de los alumnos de bachillerato de la DGETI.

Se trata de una estrategia didáctica que les permitirá a los estudiantes de bachillerato de este subsistema, tanto para los que cuentan con recursos para la modalidad en línea o para los que no, adquirir las competencias necesarias a partir de la recuperación de los conocimientos previos y la construcción de aprendizajes elementales, para continuar con su desarrollo y formación académica a través de la adquisición del sentido numérico, con el cual pueda transitar eficientemente hacia el manejo y comprensión de la abstracción que da el conocimiento lógico-matemático. La construcción del conocimiento deberá ser individual y colaborativa, donde todos los estudiantes tengan la oportunidad de adquirir los mismos conocimientos, según su propia percepción de la realidad.

El curso consta de tres periodos parciales, donde el alumno, guiado por el docente titular, deberá participar activa y dinámicamente en la construcción de sus aprendizajes y la solución de problemas en cada asignatura, en el marco de un ambiente digital y a distancia, debido a la imposibilidad de realizarse presencialmente por el riesgo de contagios presente en esta época de pandemia que nos tocó vivir.

El manual está estructurado en secciones que incluyen actividades de apertura, desarrollo y cierre como estrategias sistemáticas que le permitan al estudiante construir su conocimiento personal, adueñándose del manejo de las herramientas esenciales que le serán útiles en la adquisición de conocimientos formales posteriores y llegar a alcanzar su formación profesional y poder intervenir en los cambios que la sociedad actual le demande.

¡Somos orgullosamente DGETI!



Justificación

Si bien es cierto, las dificultades de comprensión y habilidades en matemáticas no se generan en el bachillerato, pero sí se reflejan en el aprovechamiento de los alumnos en este nivel y por consecuencia en la educación superior, por lo que se hace necesario emprender acciones dirigidas a subsanar dichas inconsistencias. Estamos convencidos que los jóvenes de nuevo ingreso al nivel medio superior mejorarán con la práctica su capacidad de observación, globalización, jerarquización, regulación de su propia comprensión, y por consecuencia, sus competencias matemáticas, cuya utilidad se verá reflejada, no sólo en el contexto académico, sino en cualquier ámbito de su vida cotidiana. Para los estudiantes que ingresan al bachillerato, es importante que inicien con una recapitulación de sus estudios básicos, porque el conocimiento de los números es una herramienta indispensable para comprender los procesos y fenómenos sociales y naturales, además es el fundamento para iniciar con los procesos de abstracción que requiere el álgebra, la geometría y el cálculo.





Bloque 1 | Manejo de la información

1.1 Definición de Estadística

1.1.1 Campo de estudio.



Actividades de Apertura



"Todas las oscuridades que presenta nuestra sociedad podrían ser iluminadas por la Estadística".

Günter Grass. Premio Nobel 1999

La estadística juega un papel fundamental en las sociedades actuales en las que se producen y utilizan grandes cantidades de información, en este sentido, tiene que ver con las formas en que se recogen, organizan y comunican conjuntos de datos y con la manera en que éstos se analizan para hacer inferencias y predicciones para la toma de decisiones.

La estadística extiende su radio de influencia a todas las disciplinas científicas y sociales ya que como afirma *Moore (2000)* proporciona un método general útil para tratar datos, estimar su variación y el riesgo en situaciones de azar, de modo que puede decirse que, es tan importante en la cultura de las personas, que forma parte de un bagaje básico de alfabetización que todos debieran tener.

La estadística es un método científico que encuentra aplicación en una gran diversidad de campos del saber humano y cuya utilidad, como quedó demostrado desde el siglo pasado, va más allá de la mera descripción, pues permite el descubrimiento de leyes y tendencias. Dentro de los muchos ejemplos que permiten ilustrar esto, basta con citar el caso del estadístico alemán Ernesto Engel** (1821 – 1896) que adquirió renombre en el terreno de las investigaciones económicas y sociales al descubrir la ley que lleva su nombre y que se enuncia así: "Cuánto menor es el ingreso familiar, mayor es la proporción destinada a la compra de alimentos".

Con datos recabados en 1857, observó que esa proporción era de 62%, 55% y 50% en familias de clase baja, media y alta, respectivamente. Al difundirse esta ley, resultó evidente que cuanto mayor es la parte del ingreso familiar que se invierte en alimentos, menor es la que se puede destinar a otros fines (vestido, salud, recreación, comodidades, etc.) y viceversa. Por esta razón, esta proporción ha sido utilizada como unidad de medida del bienestar social.

No obstante, como todo instrumento, la estadística tiene sus limitaciones; no puede, por ejemplo, diseñar investigaciones ni seleccionar problemas para someterlos a estudio, ni puede, por si sola, aportar resultados valiosos o dar interpretaciones de resultados en ausencia de una sólida teoría. Por otro lado, todos los resultados estadísticos, exactos o no, expresan de modo preciso mediante números. Pero preciso no es sinónimo de exacto; son exactas las operaciones aritméticas, pero las mediciones que conducen a los datos que las hacen posibles no siempre son confiables. Por esta razón los resultados estadísticos deben ser siempre sometidos a crítica.

Pero ¿qué es la estadística? Desde mediados del siglo XVIII hasta una centuria después, la estadística ha sido objeto de muchísimas definiciones", sin embargo, será suficiente por ahora con que nos familiaricemos con una definición que responde a los objetivos de este curso:



Actividades de Desarrollo



Definición de “Estadística”.

Ve al siguiente sitio <https://www.ecured.cu/Estad%C3%ADstica> y a partir del mismo responde en una cuartilla a las siguientes preguntas:

- ¿Qué es la estadística?
- ¿Qué campos conforman la estadística?
- ¿Qué métodos utiliza y en qué consisten?
- ¿Con qué disciplinas se relaciona?

Una vez que hayas terminado de dar respuesta a las preguntas, comparte comentarios al respecto de las preguntas con al menos un compañero y hagan llegar su trabajo a su profesor(a).

Habrás observado que se puede entender la estadística como la ciencia que permite responder a ciertas preguntas basándose en datos empíricos, es decir, en datos que se originan de la observación o la experiencia. Entendida así, diremos que es la ciencia que tiene que ver con los métodos que dan respuesta a determinadas cuestiones, mediante la recolección y la interpretación apropiadas de datos empíricos. Las observaciones o las experiencias que constituyen los datos pueden resultar de la investigación científica, de la actividad comercial o de la vida cotidiana. En cualquier caso, la estadística busca dar sentido a los datos; esto implica tanto la recolección como la interpretación de éstos.

La recolección abarca el diseño de las investigaciones empíricas, la planeación de lo que se quiere observar, la calidad y suficiencia de la observación y el registro de los datos; la interpretación, el análisis y el resumen de los datos, la extracción de conclusiones a partir de ellos y el reporte y la presentación de los resultados.

De igual modo, habrá observado que, para su estudio, la estadística se divide en dos grandes ramas; descriptiva e inferencial.

Estadística Descriptiva

Es un conjunto de procedimientos que sirven para organizar, describir y sintetizar datos, sin que las conclusiones que se extraigan de éstos rebasen su ámbito específico.

Estadística Inferencial

Es un conjunto de procedimientos que se emplean para hacer inferencias y generalizaciones respecto a una totalidad, partiendo del estudio de un número limitado de casos tomados de esta última.

Las inferencias y generalizaciones en esta rama, que complementa a la descriptiva, se basan en la teoría de la probabilidad.

El carácter propio del método estadístico descansa en el estudio de grupos o masas, a través de los elementos que los componen. En estadística no interesan aisladamente las características de un



elemento de la masa. No interesa, por ejemplo, que la vida útil de una lámpara de cierto diseño sea de 10 mil horas y la de otra de 3 mil. Lo que importa es ver la tendencia de cierto número de lámparas que puedan ser representativas de toda la producción; lo que se busca es descubrir, por ejemplo, que la vida útil promedio de ese tipo de lámparas de 7 mil horas. Si lo que se estudia es un grupo de personas, no interesa que una de ellas en particular profese el catolicismo y otra el protestantismo, por mencionar algo; lo que quisiéramos conocer podrían ser los cultos existentes y el que más se profesa en el grupo.

El medio empleado para el estudio estadístico es la enumeración o recuento. Enumerar es captar las características de los elementos sometidos a estudio y anotarlos o medirlos bajo las condiciones que se presentan. La estadística es, básicamente, un método de inducción basado en los grandes números y sus propiedades, con lo cual se eliminan los errores propios de la observación y se aumenta la validez de los resultados obtenidos.

1.1.2 Antecedentes históricos.

La palabra estadística se origina, en las técnicas de recolección, organización, conservación, y tratamiento de los datos propios de un estado, con que los antiguos gobernantes controlaban sus súbditos y dominios económicos. Estas técnicas evolucionaron a la par con el desarrollo de las matemáticas, utilizando sus herramientas en el proceso del análisis e interpretación de la información.

A modo de una brevísima nota histórica se menciona que; para mediados del siglo XVII en Europa, los juegos de azar eran frecuentes, aunque sin mayores restricciones legales. El febril jugador De Meré consultó al famoso matemático y filósofo Blaise Pascal (1623-1662) para que le revelara las leyes que controlan el juego de los dados, el cual, interesado en el tema, sostuvo una correspondencia epistolar con el tímido Pierre de Fermat (1601-1665, funcionario público apasionado por las matemáticas; célebre porque no publicaba sus hallazgos) dando origen a la teoría de la probabilidad, la cual se ha venido desarrollando y constituyéndose en la base primordial de la estadística inferencial.

Hoy en día, son de uso cotidiano las diferentes técnicas estadísticas que partiendo de observaciones muestrales o históricas, crean modelos lógico-matemáticos que se "aventuran" describir o pronosticar un determinado fenómeno con cierto grado de certidumbre medible.

El presente material no pretende teorizar el saber estadístico, desde luego, no es un material para estadísticos, ya que, adrede se obvia el rigor científico de lo expuesto en beneficio de la sencillez necesaria para el neófito; con un lenguaje coloquial se conduce al estudiante a través del contenido, a partir de dos o tres ejemplos que ilustran la aplicabilidad de los temas tratados.

La estadística, entonces, dejó de ser una técnica exclusiva de los estados, para convertirse en una herramienta imprescindible de todas las ciencias, de donde proviene la desconcertante des-uniformidad en las definiciones de los diferentes autores, ya que cada estudioso la define de acuerdo con lo que utiliza de ella, se tienen definiciones como que: la estadística es la tecnología del método científico, o que es el conocimiento relacionado con la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre, o que la estadística son métodos para obtener conclusiones a partir de los resultados de los experimentos o procesos, o que es un método para describir o medir las propiedades de una población. En fin, no se trata de discutir si la estadística es una ciencia, una técnica o una herramienta, sino de la utilización de sus métodos en provecho de la evolución del conocimiento.

La estadística hace inferencias sobre una población, partiendo de una muestra representativa de ella. Es a partir del proceso del diseño y toma de la muestra desde donde comienzan a definirse las



bondades y confiabilidad de nuestras aseveraciones, hechas, preferentemente, con un mínimo costo y mínimo error posible.

En las últimas décadas la estadística ha alcanzado un alto grado de desarrollo, hasta el punto de incursionar en la totalidad de las ciencias; inclusive, en la lingüística se aplican técnicas estadísticas para esclarecer la paternidad de un escrito o los caracteres más relevantes de un idioma.

La estadística es una ciencia auxiliar para todas las ramas del saber; su utilidad se entiende mejor si se tiene en cuenta que los quehaceres y decisiones diarias embargan cierto grado de incertidumbre... y la Estadística ayuda en la incertidumbre, trabaja con ella y nos orienta para tomar las decisiones con un determinado grado de confianza.

Los críticos de la estadística afirman que a través de ella es posible probar cualquier cosa, lo cual es un concepto profano que se deriva de la ignorancia en este campo y de lo polifacético de los métodos estadísticos. Sin embargo, muchos "investigadores" tendenciosos han cometido abusos con la estadística, elaborando "investigaciones" de intención, teniendo previamente los resultados que les interesan mostrar a personas ingenuas y desconocedoras de los hechos. Otros, por ignorancia o negligencia, abusan de la estadística utilizando modelos inapropiados o razonamientos ilógicos y erróneos que conducen al rotundo fracaso de sus investigaciones.

Lincoln L. Chao (Estadística para ciencias administrativas. 3a ed. México: Mc Graw Hill 1993) hace referencia a uno de los más estruendosos fracasos, debido a los abusos en la toma de una muestra:

Se trata del error cometido por la Literary Digest que, en sus pronósticos para las elecciones presidenciales en EE. UU. para 1936, afirmó que Franklin D. Roosevelt obtendría 161 votos electorales y Alfred Landon, 370. La realidad mostró a Roosevelt con 523 votos y a Landon con 8 solamente.

El error se debió a que la muestra fue tomada telefónicamente a partir de la lista de suscriptores de la Digest y, en 1936, las personas que se daban el lujo de tener teléfonos y suscripciones a revistas no configuraban una muestra representativa de los votantes de EE.UU. y, por ende, no podía hacerse un pronóstico confiable con tan sesgada información.

Ante todo, la estadística es un elemento útil, ya que permite obtener información referida a grandes grupos de individuos conociendo los datos de sólo unos pocos.

El desarrollo de la Estadística se fundamenta científicamente a partir de los años 30 a raíz de los problemas planteados en la sociedad industrial, por el desarrollo de otras ramas de las Matemáticas y de otros campos como la Biología, Medicina, Informática...

Actualmente, la estadística se ha convertido en un método efectivo para describir con exactitud los valores de datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos y físicos, y sirve como herramienta para relacionar y analizar dichos datos. El trabajo del experto estadístico no consiste ya sólo en reunir y tabular los datos, sino sobre todo en el proceso de interpretación de esa información. El desarrollo de la teoría de la probabilidad ha aumentado el alcance de las aplicaciones de la estadística. Muchos conjuntos de datos se pueden aproximar, con gran exactitud, utilizando determinadas distribuciones probabilísticas; los resultados de éstas se pueden utilizar para analizar datos estadísticos. La probabilidad es útil para comprobar la fiabilidad de las inferencias estadísticas y para predecir el tipo y la cantidad de datos necesarios en un determinado estudio estadístico.

La sociedad tiene la necesidad de conocer toda esta información, y de acceder a ella de la forma más resumida posible.



Actividades de cierre



A partir de consultar el sitio https://www.ine.es/explica/docs/historia_estadistica.pdf responda a las siguientes preguntas;

¿Cómo surge la estadística?

¿Cuáles son los principales registros que se han documentado al respecto de la historia de la estadística, en particular antes de la era cristiana con las civilizaciones de los egipcios, romanos, chinos y griegos?

¿Qué dice la historia, del desarrollo de la estadística durante la edad media?

¿Qué se sabe del desarrollo de la estadística en la edad Moderna?

¿Qué se sabe del desarrollo de la estadística en la edad contemporánea?

¿Qué relevancia tendrá la estadística como para fijar el día mundial de la estadística?

Una vez que haya terminado de dar respuesta a las preguntas, haga llegar su trabajo a su profesor(a)

1.2 Población, muestra y tipos de variables.



Introducción



La mayoría de las ciencias avanza y crea marcos teóricos, comprobando con la observación directa de todo lo conocido. Un ejemplo es el de las aves, hasta hace unos cientos de años los biólogos tenían a un conjunto de animales que tenían pico, todos ellos eran aves, ya sabes; con plumas, dos patas, forma conocida, etc. En base a ellas se crearon libros, categorías, cursos completos. Cuando se conoció para el mundo europeo–americano al ornitorrinco, la mayoría de las teorías al respecto se vinieron abajo.

Con lo anterior queremos establecer que, para hacer una afirmación científica absoluta, deberíamos conocer a TODOS los elementos que vamos a estudiar, esto es en ocasiones imposible, de ahí que se han desarrollado técnicas para el análisis de una parte de los elementos a estudiar.



Actividades de Apertura

Reflexiona lo siguiente: Si quisiéramos saber el número de habitantes de un estado o municipio, tardaríamos varias semanas en contar a todos y cada uno de ellos, cuando finalmente terminamos, ya nacieron o fallecieron algunos de sus habitantes.

Es por ello que se hacen estudios de una porción de los habitantes y luego se generaliza. Esto también es aplicable a la industria en general.



Actividades de Desarrollo



1.2.1 Población

La **población o Universo** es todo conjunto de personas, cosas, objetos, etc., con ciertas características comunes que puede ser finita o infinita.

1.2.2 Muestra

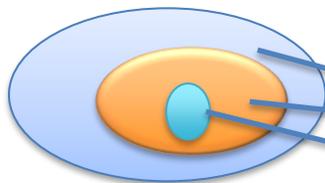
La **Muestra** es toda porción de elementos tomada de una población, entre más grande sea la muestra, será más representativa de la población.

El **Muestreo** es el procedimiento por el cual se recopila información de los elementos de una muestra, existen varias formas de realizar el muestreo, unas son más sencillas que otras, otras más económicas y otras más representativas.

Ejemplo 1:



Se desea estudiar las características económicas de un estado de la República Mexicana. Escribe tu propuesta de un ejemplo de Universo, Muestra y elemento.



Universo	País – Habitantes de México
Muestra	Estado – Habitantes de Michoacán
Elemento	Municipio – Habitantes de Jiquilpan



Ejemplo 2:

Se desea estudiar las Socio económicas de los alumnos del CBTis 12 de Jiquilpan, Mich. Para facilitar el estudio, se decide tomar como muestra a un grupo al azar. Escribe tu propuesta de un ejemplo de Universo, Muestra y elemento.

Universo:	Alumnos del CBTis 12
Muestra:	Alumnos de 5° "A" de Laboratorista.
Elemento:	Joaquín Díaz Juárez de San Diego Quitupán.

1. Escribe 2 ejemplos que contengan universo, población y muestra. Pueden ser de artículos de tu agrado como: celulares, motos, consolas de juegos, etc.

	Ejemplo 1	Ejemplo 2
Universo		
Muestra		
Elemento		

1.2.3 Tipos de variables

Una **Variable** se puede representar con un símbolo tal como x, y, a, b, que puede tomar un valor cualquiera. Si esta variable solamente toma un valor, se le llama **Constante**.

Alumno	Promedio
Francisco	9.2
Felipe	8.7
Raúl	9.5
Jaime	8.0

} **Variable**

En este caso el promedio es la variable.

1.2.3.1. Variables cualitativas

Las variables cualitativas son aquellas que describen las cualidades o características de un objeto o evento mediante palabras, frases, letras, etc. Son subjetivas de acuerdo con el observador. Por



ejemplo, si deseamos describir el estado de conservación de una bicicleta, alguien podría decir que su estado es muy bueno, mientras que otra la calificaría como Bueno.

Las variables cualitativas se clasifican en:

Variables Nominales son las más simples y abundantes, su única función es la de clasificar en categorías y su orden es indistinto. NO tiene sentido realizar operaciones aritméticas con ellas.

Ejemplo



		Estado Civil				
Variable →		Soltero	Casado	Divorciado	Viudo	Unión libre
Categoría →		1	2	3	4	5

Aquí los números carecen de propiedades solo sirven para distinguir un estado civil de otro, no significa que un estado civil sea mejor o mayor que otro.

Variables Ordinales clasifican las observaciones en categorías que exigen ordenación, su variable operacional es una escala ordinal de mayor a menor.

Ejemplo



		Grado de Alcoholismo			
Variable →		Abstemio	Ocasional	Regular	Constante
Escala de medición →		1	2	3	4

NO tiene sentido realizar operaciones aritméticas con ellas.

1.2.3.2. Variables cuantitativas

Las variables cuantitativas son aquellas que se pueden representar por una cantidad numérica exacta, por lo general son medidas objetivas, es decir, que no depende de quien realice la medición. En ocasiones puede tener un pequeño error dependiendo del instrumento con que se mida.

Las variables cuantitativas se clasifican en:

1.2.3.3. Variables Discretas

Variables Discretas son las que toman solo algunos valores dentro de un intervalo, por ejemplo, valores enteros. Al indicar el número de hijos que tiene una familia, el número de recámaras de una casa, el número de mascotas, etc.



Ejemplo

		Número de hijos por familia						
Variable →		1	2	3	4	5	6	7 o más
Escala de medición →		1	2	3	4	5	6	7 o más



1.2.3.4. Variables Continuas

Variables Continuas Son las que pueden tomar cualquier valor fijo dentro de un intervalo, siempre entre dos valores observables, va a existir un tercer valor intermedio, que también podría tomar la variable continua.

Ejemplo



Variable	→	Estatura (escuela primaria)						
Escala de medición	→	1.10m	1.2m	1.21m	1.215m	1.35m	1.352m	1.40m

Una variable continua toma valores a lo largo de un continuo, esto es, en todo un intervalo de valores. Un atributo esencial de una variable continua es que, a diferencia de una variable discreta, nunca puede ser medida con exactitud; el valor observado depende en gran medida de la precisión de los instrumentos de medición. Con una variable continua hay inevitablemente un error de medida.



Actividades de cierre



Reflexiona cuando en alguna ocasión te ha tocado llenar un formulario, ya sea de inscripción, de apertura de una cuenta, una solicitud, etc. ¿Cuál tipo de variable te recordó al ver las anteriores?

Llena un ejemplo de ese tipo de variable que recuerdas y que sea distinto a los ejemplos ya vistos.

Ejemplo de una variable _____

Variable	→							
Escala de medición	→							



1.3. Niveles de medición de variables.



Actividades de Apertura



Se define como variable a la característica, cualidad o atributo de interés de las unidades de una población o una muestra.

Si las unidades de interés son estudiantes, las variables que pueden resultar relevantes son: edad, promedio general de aprovechamiento, estatura, peso, sexo, entre muchos otros; si las unidades de estudio son frutas, las variables son: pesos, sabor, color, textura, contenido de agua, valor proteínico o vitamínico, etcétera.

Las variables pueden tomar diferentes valores, los cuales se clasifican en las escalas siguientes:



Actividades de Desarrollo



1.3.1. Nominal

Esta escala utiliza para clasificar a la población en diferentes categorías, en las cuales no existe una forma particular para ordenar las etiquetas. Por ejemplo, un ser humano puede ser de sexo masculino o femenino; la clasificación de los seis colores de las lunetas de chocolate de leche M&M; los ciudadanos pueden tener como estado civil: soltero o casado.

1.3.2. Ordinal

La escala ordinal se caracteriza porque las modalidades que integran a la misma tienen un orden entre ellas. Se distingue porque no se define la distancia entre las observaciones. Por ejemplo, México es un país que consume altas cantidades de refresco, pero al entrevistar a una persona acerca de la frecuencia con que consume esta bebida, se pueden tener respuestas como: regularmente, algunas veces, pocas veces, casi nunca, nunca; si se cuestiona a los ciudadanos de un municipio si están de acuerdo con la forma de gobierno, se podrán tener respuestas como: totalmente de acuerdo, de acuerdo, indiferente, en desacuerdo y totalmente en desacuerdo.

1.3.3. De intervalo

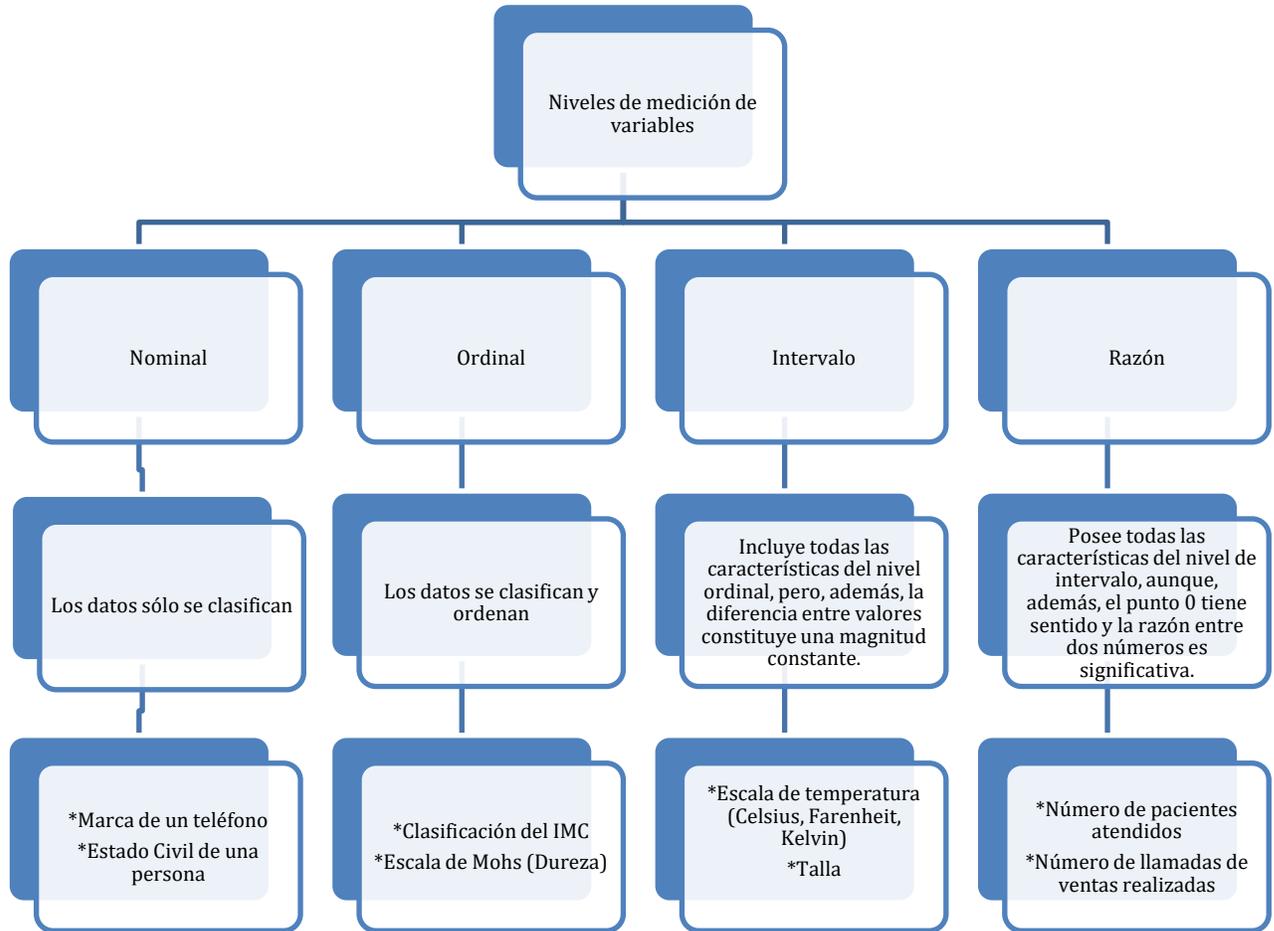
Esta escala, además de clasificar y ordenar, establece la proporción o la distancia entre dos intervalos contiguos. Requiere una unidad de medida y un punto cero arbitrario (no necesariamente el cero absoluto). Un ejemplo clásico de este tipo de escala es la temperatura en grados centígrados, Kelvin o Fahrenheit, ya que la unidad de medida y el punto cero son arbitrarios.



1.3.4. De razón

Este tipo de escala clasifica, ordena, establece la proporción o distancia entre dos intervalos contiguos y agrega el cero absoluto; además son permisibles las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) e implica las relaciones de equivalencia (mayor que, menor que, y equivalente). Hay muchos casos aplicables a esta escala; por ejemplo, se puede cuestionar a un grupo de personas sobre sus pesos o pesar diferentes objetos; es posible estimar la altura de diferentes objetos, animales o personas.

La siguiente gráfica resume las principales características de los diversos niveles de medición.



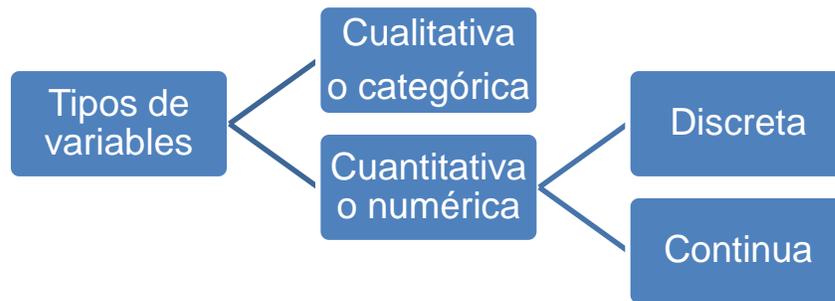
Cuando se mide una variable, el resultado de la medición se puede expresar con base en sus características o de forma numérica. Por tanto, se tienen dos tipos de variables:

Cualitativa o categórica. Cuyos posibles valores son únicamente categorías. En este tipo de variables se ubican las categorías nominal y ordinal.

Cuantitativa o numérica. Cuyos posibles valores son números, en ésta se ubican las categorías de intervalo y razón.



La siguiente gráfica resume los dos tipos de variables:



1. Señala con una palomita el tipo de escalas de medida a la que pertenece cada una de las variables siguientes:

No.	Variables	Nominal	Ordinal	De intervalo	De razón
1	Peso de una persona				
2	La raza de un perro				
3	Frecuencia cardiaca				
4	Grado de una enfermedad				
5	Marca de un automóvil				
6	La escolaridad de una persona				
7	Nacionalidad				
8	Cantidad de Hemoglobina				
9	Lugar de nacimiento				
10	Número de hijos				



Actividades de cierre

1. En tu cuaderno, elabora un mapa conceptual de los tipos de variables y las categorías de los datos. En la elaboración de tu mapa incluye algunos ejemplos.



1.4 Frecuencias



Introducción



Agrupar datos y clasificarlos son tareas importantes para producir información. En las tablas estadísticas de frecuencias, cada clase tiene una frecuencia de la clase, que es el número de mediciones que se pueden agrupar en ella. Con las clases y sus frecuencias se construye la tabla de frecuencias, también llamada distribución de frecuencias, de la que se obtiene la frecuencia relativa de cada clase.



Actividades de Apertura



La frecuencia estadística es la cantidad de veces que se repite una observación durante la realización de un muestreo.

1.4.1. Frecuencia Absoluta (acumulada)

Se le llama frecuencia absoluta al **número de veces que se repite una variable en un experimento**. Esta se representa con f_i ó n_i .

Frecuencia absoluta acumulada

La frecuencia acumulada es aquella que se obtiene al sumar todas las frecuencias absolutas inferiores o iguales al valor en cuestión.

1.4.2. Frecuencia Relativa (acumulada)

Representa la cantidad de veces que se repite una observación, expresada como proporción de la muestra, es decir, es el resultado de dividir el valor de la frecuencia absoluta por el tamaño de la muestra estadística.

Esta se representa con f_r y se define como $f_r = n/N$, siendo n el número de veces que se repite la respuesta y N el tamaño de la muestra. Su valor se expresa como porcentaje.

Frecuencia relativa acumulada

En esta se tiene en cuenta la sumatoria de todas las frecuencias relativas inferiores o iguales al valor en cuestión. Se representa con f_r .

La frecuencia relativa acumulada de la clase i es igual a la suma de las frecuencias relativas de todas las clases anteriores a ella más la de la clase i .



Actividades de Desarrollo

1. Analiza los siguientes ejemplos desarrollados, ya que esto te permitirá poder utilizar esta información más adelante en tablas más complejas para encontrar las medidas de tendencia central o de dispersión.

Ejemplo 1.



En una autopista se midieron las velocidades de 50 automóviles en km/h utilizando una lámpara para medir la velocidad, y cuyos resultados se anotan a continuación.

88	106	107	145	142	91	103	87	130	99
132	144	112	89	137	110	139	105	147	119
123	108	133	111	122	123	94	145	113	146
109	108	88	120	138	91	135	145	110	95
100	137	110	137	142	120	113	140	136	150

Más adelante observarás la explicación para ordenar los datos, en este espacio te explicaré como retomar las frecuencias y colocarlas en la siguiente tabla.

Al ordenar los datos en esta tabla puedo empezar a retomar los datos que se repiten a esto le llamaremos frecuencias

Tabla 1. Velocidad de automóviles en una autopista.

Clase	Intervalo VELOCIDAD (Km/h)	Frecuencia absoluta $f_i = f$	Frecuencia Relativa f_r	Frecuencia Acumulada cf
1	87 - 95	8	0.16	8
2	96 - 104	3	0.06	11
3	105 - 113	13	0.26	24
4	114 - 122	4	0.08	28
5	123 - 131	3	0.06	31
6	132 - 140	10	0.2	41
7	141 - 149	8	0.16	49
8	150 - 158	1	0.02	50
		$N=n=\sum f =50$	1	

Observa que la suma de la frecuencia relativa siempre será la unidad, en el caso de la frecuencia acumulada no se suma ya que esta acumulada dando el total de las frecuencias.



Ejemplo 2:

En una investigación acerca de la temperatura máxima en grados centígrados en la ciudad de Veracruz en la temporada de verano, durante 4 años se obtuvieron datos al azar y se tabularon como se muestra a continuación.

En la siguiente tabla pondrás en práctica los conceptos analizados.

Tabla 2. Temperaturas máximas durante el verano en la ciudad de Veracruz (muestras aleatorias de 4 años).

Clase	Intervalo de clase: TEMPERATURA °C	Frecuencia absoluta $f_i = f$	Frecuencia Relativa f_r	Frecuencia Acumulada cf
1	28 - 30	3	0.025	3
2	31 - 33	10	0.083	13
3	34 - 36	20	0.167	33
4	37 - 39	28	0.233	61
5	40 - 42	35	0.292	96
6	43 - 45	24	0.2	120
Total		n=120	1	

Podrás observar que la frecuencia absoluta son las frecuencias obtenidas directamente de la información, en cuanto a la frecuencia relativa. La frecuencia absoluta es una medida estadística que nos da información acerca de la cantidad de veces que se repite un suceso al realizar un número determinado de experimentos aleatorios, esta medida se representa como f_i o f , como ya se mencionó en párrafos anteriores, se refiere a la realización i -ésima del experimento aleatorio.

La frecuencia relativa es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de un determinado valor entre el número total de datos registrados, la frecuencia absoluta relativa será el número de resultados de dividir, la frecuencia acumulada entre el número total de registros.



Actividades de cierre

En este caso se está agregando una columna para que agregues la frecuencia relativa acumulada.

Vida de una pieza metálica.

1. Una máquina para triturar piedra utiliza una pieza metálica sujeta a rotación y fricción. Esa pieza tiene lo que se llama un “tiempo” de vida útil”. El productor de las máquinas realiza frecuentemente pruebas a la pieza para conocer cuántas horas de duración de la pieza debe garantizarles a los clientes. En la siguiente tabla se muestran los resultados de la distribución de frecuencias de los tiempos de vida obtenidos en las 60 piezas.



Tabla 3. Duración de las piezas en una hora.

Clase	Intervalo de clase: HORAS (H)	Frecuencia f	Frecuencia Relativa f_r	Frecuencia Acumulada cf	Frecuencia Relativa Acumulada
1	2900 - 3100	5			
2	3101 - 3301	8			
3	3302 - 3502	12			
4	3503 - 3703	25			
5	3704 - 3904	10			
	Total				



Actividades de contexto o Transversales

1. Analiza los siguientes ejercicios como reforzamiento del tema analizado anteriormente Frecuencias absoluta y relativa, frecuencia acumulada y completa las tablas.

- a) Los siguientes datos de la tabla muestra la distribución de frecuencias de tiempos de una muestra, tomada al azar de la duración en segundos de comerciales transmitidos por la televisión comercial en el horario de las 20:00 hrs. a las 23:00 hrs. tomada en un periodo de dos años. No se repite un comercial en la muestra.

Clase	Intervalo Real de clase: T	Frecuencia f	Frecuencia Relativa f_r	Frecuencia Acumulada cf	Frecuencia Relativa Acumulada
1	$5 < T \leq 10$	23			
2	$10 < T \leq 15$	66			
3	$15 < T \leq 20$	49			
4	$20 < T \leq 25$	16			
5	$25 < T \leq 30$	4			
6	$30 < T \leq 35$	2			
	Totales	160			



- b) Se realiza una investigación acerca del punto de fusión del plomo (Temperatura a la cual cambia de sólido a líquido). Se trabaja en un laboratorio con temperatura controlada a $26^{\circ}C$ en crisoles de acero (Fuente de fuego de precisión e instrumentos de medición de calidad). Los datos de una muestra de 100 observaciones se han vaciado en la tabla de distribución de frecuencias siguiente:

Clase	Intervalo: Temperatura de fusión en $^{\circ}C$	Frecuencia f	Frecuencia Relativa f_r	Frecuencia Acumulada cf	Frecuencia Relativa Acumulada
1	$326 < C \leq 326.4$	8			
2	$326.4 < C \leq 326.8$	12			
3	$326.8 < C \leq 327.2$	70			
4	$327.2 < C \leq 327.6$	7			
5	$327.6 < C \leq 328$	3			
	Totales	n=			



1.5 Tablas de Distribución de Frecuencias

1.5.1 Elementos



Introducción



Los **datos** son situaciones o hechos que se representan numéricamente y que algunas veces forman parte de la vida cotidiana y otras, se encuentran en libros porque han sido recopilados por otras personas. Por lo anterior, los datos pueden ser:

Datos Originales: Son aquellos que son recopilados por el propio investigador; por lo tanto, son comprobables en forma rigurosa.

Datos Indirectos: Son aquellos que son recopilados de enciclopedias, libros de registro, sucesos grabados en audio y video, etc.

Una vez hecha la recopilación de los datos, el siguiente paso es su correcta organización para que brinden una información fiel y de gran utilidad, considerando su naturaleza de acuerdo con los propósitos para los que fueron recopilados.

Ordenación estadística de los datos: es el método o técnica que se usa para reunir datos numéricos, los cuales se pueden ordenar en forma creciente (ascendente) o decreciente (descendente).



Actividades de Apertura



1.5.1.1 Rango

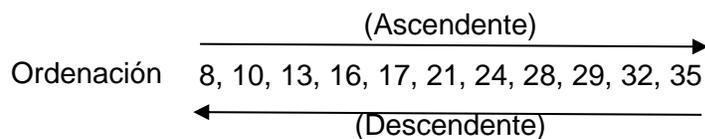
El *Recorrido o Rango* es la diferencia que existe entre el mayor y menor de los datos:

$$R = X_M - X_m$$

Ejemplos:

1. Ordena y calcula el rango de los siguientes datos: 8, 13, 29, 16, 32, 24, 17, 10, 21, 28, 35.

Solución:



El rango se determina por la ecuación:



$$R = X_M - X_m$$

$$R = 35 - 8$$

$$R = 27$$

2. Las calificaciones finales de matemáticas de 40 estudiantes del CBTis No. 7 son:

95	70	96	85	100	49	83	89
55	55	65	77	80	70	92	93
74	66	95	65	87	100	45	77
60	75	69	52	82	68	78	92
58	56	70	70	74	98	75	64

Determina su ordenación Creciente y su Rango.

Solución:

La ordenación creciente es:

Dato menor	45	56	65	70	75	80	89	95	
	49	58	66	70	75	82	92	96	
	52	60	68	70	77	83	92	98	
	55	61	69	74	77	85	93	100	
	55	65	70	74	78	87	95	100	Dato mayor

Su rango es:

$$R = X_M - X_m$$

$$R = 100 - 45$$

$$R = 55$$

Ejercicios:



Desarrolla en equipo los siguientes ejercicios y discute en plenaria los resultados:

1. Ordena y calcula el Rango para los siguientes datos:

a) 68, 70, 74, 94, 75, 78, 88, 72, 63, 78, 85, 95, 77, 62, 93, 90.

b) 19, 54, 36, 29, 10, 48, 16, 52, 39, 24.

c) 2, 7, 20, 13, 1, 9, 16, 11, 5, 18.



2. Un cuestionario de 60 preguntas con el tema “Clásicos de la música”, aplicado a 50 ciudadanos comunes, dio lugar a los siguientes aciertos.

39	44	28	53	37	46	51	33	29	48
46	57	55	38	31	49	52	56	29	55
46	58	55	43	36	34	41	40	44	38
36	51	50	30	35	39	49	53	19	24
37	46	31	26	48	44	39	52	40	35

Considera los datos anteriores y determina:

- Su ordenación Decreciente.
- Su Rango.
- Las cantidades de las 3 personas con el menor número de aciertos.
- Las cantidades de las 3 personas con el mayor número de aciertos.
- Las cantidades del primero al décimo lugar con mayor puntuación.
- Número de personas que obtuvieron más de 40 aciertos.
- Número de personas que obtuvieron menos de 30 aciertos.
- La cantidad del vigésimo lugar en orden ascendente.



Actividades de Desarrollo

Distribución de Frecuencias de Datos

Cuando se tiene una gran cantidad de datos, se recomienda distribuirlos en clases o categorías y determinar con precisión el número de datos pertenecientes a cada clase. Este procedimiento se denomina *frecuencia de clase* o también, *frecuencia absoluta de clase*.

Lo anterior es de gran utilidad ya que permite analizar con mayor facilidad un grupo de datos sin que se tenga que considerar individualmente cada uno de ellos.

La orientación tabular de los datos en clases o categorías en la cual se conjunta cada clase con su respectiva frecuencia se denomina *distribución de frecuencias* o *tabla de frecuencias*.



Ejemplo:

La tabla siguiente es una distribución de frecuencias de los salarios diarios de 72 profesionales de la industria petrolera:

Tabla de frecuencias

Salarios (dólares)	Número de profesionales
30 - 39	7
40 - 49	12
50 - 59	19
60 - 69	16
70 - 79	10
80 - 89	6
90 - 99	2
	N= 72

Clases o
Categorías

Frecuencias
de clase

La segunda clase o categoría comprende los salarios de 40 a 49 dólares y se representa (40 – 49), dado que doce profesionales tienen un salario perteneciente a esta clase, la respectiva frecuencia absoluta es 12.

Cuando los datos se ordenan y se resumen en una tabla o distribución de frecuencias, éstos se denominan *datos agrupados*.

1.5.1.2 Clases o Intervalos

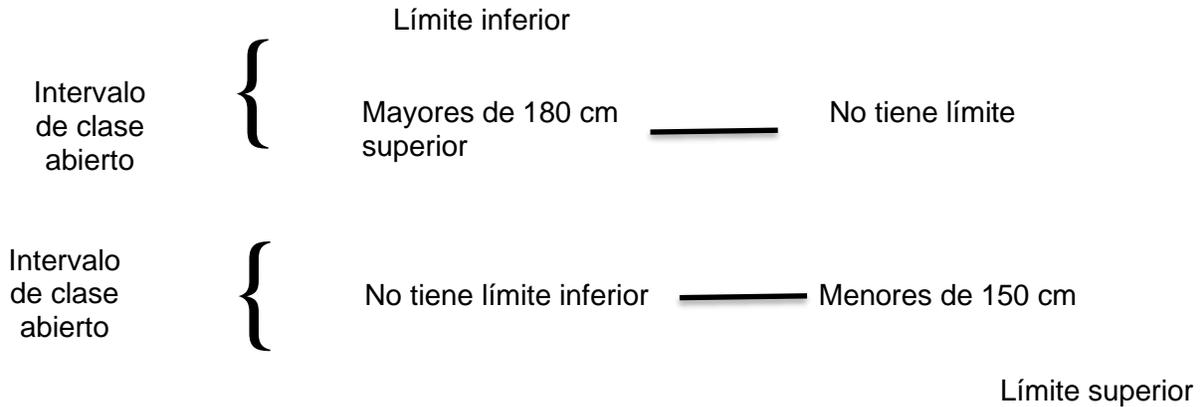
Si se observa la tabla del ejemplo anterior, la cuarta clase o categoría se denota por los números “60 – 69”. El conjunto de valores que abarcan desde 60 hasta 69 recibe el nombre de *intervalos de clase*.

Intervalo de clase abierto

Se define como el intervalo de clase abierto a aquel que, al menos teóricamente, no tiene límite inferior o límite superior.

Ejemplo:

Al referirse a las estaturas de grupos de individuos, los intervalos de clase que contienen estaturas mayores de 180 cm o menores de 150 cm, respectivamente, se consideran intervalos de clase abierto, es decir:



Los *intervalos de clase* o *intervalo exacto* son aquellos donde pueden agruparse los datos de una variable estadística. Es conveniente que cuando se seleccione el número de intervalos o de clases NC, éste no sea muy pequeño o muy grande, esto depende de la experiencia del analista que realice la tabla. En ocasiones, se toma el criterio de la raíz cuadrada del número de datos (N), en otras la raíz cúbica o la regla de Storges que está dada por la ecuación:

$$NC = 1 + 3.3n$$

También se puede seleccionar el número de intervalos o de clases dividiendo el rango entre un número cualquiera de clase, empezando desde 5 y hasta 20; se selecciona el número de clase en el cual el resultado de la división (anchura) sea un número que se puede redondear al inmediato superior.

1.5.1.3 Límites o fronteras de clase

Cada intervalo de clase delimita los valores que ésta puede poseer y siempre consta de un límite inferior y de un límite superior.

En el ejemplo de la tabla anterior, los números extremos, 50 y 59, son los *límites de clase*; el número menor (50) es el *límite inferior de la clase* y el mayor (59) es el *límite superior de la clase*.

Límites Reales de clase

Considerando la tabla del ejemplo sobre los salarios que se registran con aproximación de dólares, la tercera clase (50 – 59) incluye a todos los salarios desde 49.50 a 59.50 dólares.

La representación exacta de los datos anteriores, 49.5 y 59.5, se denomina *límites reales de clase* o *límites verdaderos de clase*; el menor de ellos (49.5) se identifica como *límite real inferior* y el mayor de ellos (59.5) se identifica como *límite real superior*.

Límite real inferior se determina sumando el límite inferior más el límite superior de la clase contigua anterior y dividiendo entre dos.

Límite real superior se determina sumando el límite superior más el límite inferior de la clase contigua siguiente y dividiendo entre dos.



Ejemplo:

Considerando los intervalos de clase de la tabla de los salarios diarios del ejemplo anterior:

Salarios (dólares)	
Límites inferiores	Límites superiores
*	29
30	39
40	49
50	59
60	69
70	79
80	89
90	99
100	*

Intervalos de clases

Al calcular los límites reales de clases para el primer intervalo de clase resulta:

$$LRi = \frac{30 + 29}{2} = 29.5$$

$$LRs = \frac{39 + 40}{2} = 39.5$$

Para el segundo intervalo de la clase resulta:

$$LRi = \frac{40 + 39}{2} = 39.5$$

$$LRs = \frac{49 + 50}{2} = 49.5$$

Y así sucesivamente, se calculan los límites reales en cada clase.

Por lo anterior, se concluye que los límites reales de clases para la tabla del ejemplo son:

Salarios (dólares)	
Límites reales inferiores	Límites reales superiores
29.5	39.5
39.5	49.5
49.5	59.5
59.5	69.5
69.5	79.5
79.5	89.5
89.5	99.5

Límites reales de clases



La tabla anterior resulta ser incierta, ya que los límites reales de clases no son coincidentes con las observaciones reales; por ejemplo, si una observación fuese 49.5, no es posible definir si pertenece al intervalo de clase (39.5 – 49.5) o al intervalo (49.5 – 59.5). Lo anterior da lugar a que en algunas ocasiones los límites reales de clases sean utilizados únicamente como símbolos de las clases.

1.5.1.4 Marca de clase

Se define como el punto medio de un intervalo de clase y se representa por (X). La marca de clase también se denomina *punto medio de la clase*, y matemáticamente se determina por la suma de los límites inferior y superior del intervalo de clase, dividida entre dos. Lo anterior se simboliza por la ecuación:

$$\text{Marca de clase } (X) = \frac{\text{Límite inferior } (L_i) + \text{límite superior } (L_s)}{2}$$

Ejemplo:

Al considerar los intervalos de clases de la tabla de los salarios diarios del ejemplo anterior, tenemos que la marca de clase del primer, tercer y quinto intervalo, respectivamente, es:

$$X_1 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{30 + 39}{2} = \frac{69}{2} = 34.5$$

$$X_3 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{50 + 59}{2} = \frac{109}{2} = 54.5$$

$$X_5 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{70 + 79}{2} = \frac{149}{2} = 74.5$$

Por lo anterior, se concluye que la marca de clase para la tabla del ejemplo es:

Salarios (dólares)		Marca de clase (X)
Límites reales inferiores	Límites reales superiores	
30	39	34.5
40	49	44.5
50	59	54.5
60	69	64.5
70	79	74.5
80	89	84.5
90	99	94.5



En todos los análisis estadísticos, se supone que el total de los elementos pertenecientes a un intervalo de clase son coincidentes con el valor de la marca de clase; por ejemplo, todos los salarios del segundo intervalo de clase (40 – 49) se consideran de 44.5 dólares.

1.5.1.5 Amplitud o ancho de clase

Representa la diferencia que existe entre los límites inferiores o superiores de cada intervalo de clase. Se calcula dividiendo el rango entre el número de clases; matemáticamente se expresa con la ecuación:

$$C = \frac{R}{NC}$$

Se define también como la diferencia entre los límites reales de clase que forman el intervalo de clase y se expresa matemáticamente:

$$C = LRS - LRI$$

La *anchura común* se presenta cuando todos los intervalos de clase de una distribución de frecuencias tienen igual tamaño o longitud, la cual se simboliza por C y matemáticamente es igual a la diferencia entre dos límites reales de clase inferiores o superiores sucesivos:

$$\left. \begin{aligned} C &= 39.5 - 29.5 = 10 \\ C &= 49.5 - 39.5 = 10 \\ C &= 59.5 - 49.5 = 10 \end{aligned} \right\} \text{ Anchura común}$$

Por lo anterior, se concluye que los intervalos de clase de dicha tabla presentan una anchura común de 10 unidades.

Reglas generales para formar las distribuciones de frecuencias:

1. Determinar el recorrido o rango entre los datos registrados.
2. Dividir el rango en un número razonable de intervalos de clase que tengan el mismo tamaño o anchura. Si lo anterior no es posible, se aconseja emplear intervalos de clase de diferente tamaño o anchura. Por lo general, el número de intervalos de clase se selecciona entre 5 y 20, dependiendo de la cantidad de datos registrados.
3. Determinar las frecuencias de clase, es decir, contar el número de observaciones que caen dentro de cada intervalo de clase.



Ejemplos:

1. En la siguiente tabla se presentan los pesos de 50 estudiantes que se registraron con aproximación de una libra. Construye la tabla de distribución de frecuencias.

128	154	140	122	154	135	159	167	142	144
136	148	130	137	146	143	162	154	146	147
158	116	179	141	139	129	164	175	149	128
136	163	132	137	145	144	150	145	170	181
151	135	125	132	160	156	155	138	153	147

Solución:

- a) Al ordenar los datos en forma creciente tenemos:

Dato menor	16	29	35	38	43	46	49	54	59	67	
	22	30	36	39	44	46	50	54	60	70	
	25	32	36	40	44	47	51	55	62	75	
	28	32	37	41	45	47	53	56	63	79	
	28	35	37	42	45	48	54	58	64	81	Dato mayor

- b) Su rango es:

$$R = X_M - X_m$$

$$R = 181 - 116$$

$$R = 65$$

- c) Selección del número de intervalo de clase por medio de la ecuación:

$$C = \frac{R}{NC}$$

Se elige como número de clase a partir del 5:

$$C = \frac{65}{5} = 13$$

Este número de clase no me sirve, debo encontrar uno en el que el resultado se pueda redondear al inmediato superior.

$$C = \frac{65}{6} = 10.8 \approx 11$$

Con este número de clases (6) y con la anchura de (11), podremos construir la tabla de manera que tengamos una anchura común y todos los datos, desde el menor hasta el mayor, estén dentro de los intervalos de clase.



d) Formemos los intervalos de clases:

Iniciamos con el dato menor (116) que sería el límite inferior para el primer intervalo de clase. En el segundo intervalo de clase sumamos la anchura $C=11$ al límite inferior 116. Y seguimos sumando así sucesivamente hasta que llegemos a la clase 6. Para estar seguros de que está correcto el agrupamiento, podemos agregar una clase más, solo para comprobar que el límite inferior es mayor al dato mayor (181). Al sumar obtenemos: $171+11= 182$. Como se puede observar, este valor es mayor que 181, por lo tanto la agrupación de datos es correcta.

Ahora solo falta obtener los límites superiores de cada intervalo de clase. Esto se logra restando una unidad al límite inferior contiguo siguiente, o sea, para el primer límite superior: $127-1= 126$; para el segundo $138-1= 137$, así sucesivamente hasta llegar al último límite superior; como recordamos, agregamos un intervalo más que nos dio como límite inferior **182**, este es el valor que tomaremos para restar la unidad y encontrar el límite superior correspondiente al último intervalo o clase, como se observa en la siguiente tabla:

Intervalos de clase (Peso en libras)	
Límite inferior	Límite superior
116	$127-1= 126$
$116+11= 127$	$138-1= 137$
$127+11= 138$	$149-1= 148$
$138+11= 149$	$160-1= 159$
$149+11= 160$	$171-1= 170$
$160+11= 171$	$182-1= 181$

e) Se construye la tabla de distribución de frecuencias:

En la *primera columna* se colocan los intervalos de clase que ya se crearon, como encabezado se anota el tipo de observación que se está analizando, o sea, el peso en libras.

En la *segunda columna*, se colocan las frecuencias de cada intervalo de clase, que en este ejemplo, sería el número de estudiantes que tienen los pesos que se observan de cada intervalo. Así que en la tabla de datos ordenados contamos a los estudiantes que pesan entre 116 y 126 libras (se deben contar también los datos que se repiten). Y así seguimos sumando para encontrar las frecuencias de todos los intervalos de clase y al final sumamos todas las frecuencias (N) para comprobar que correspondan al mismo número de estudiantes que se registraron.



En la *tercera columna* se obtienen las marcas de clase de cada intervalo con la siguiente ecuación:

Peso en libras	No. de estudiantes (f)	Marca de clase (X)
116 - 126	3	121
127 - 137	13	132
138 - 148	15	143
149 - 159	11	154
160 - 170	6	165
171 - 181	3	176
N= 50		

$$X_1 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{116 + 126}{2} = \frac{242}{2} = 121$$

$$X_2 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{127 + 137}{2} = \frac{264}{2} = 132$$

$$X_3 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{138 + 148}{2} = \frac{286}{2} = 143$$

$$X_4 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{149 + 159}{2} = \frac{308}{2} = 154$$

$$X_5 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{160 + 170}{2} = \frac{330}{2} = 165$$

$$X_6 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{171 + 181}{2} = \frac{352}{2} = 176$$

NOTA: Es posible construir otras tablas de distribución de frecuencias utilizando otros criterios sobre la selección del número de intervalos de clase.

Ejercicios:

Construye la tabla de distribución de frecuencias para los siguientes problemas:

- Las siguientes son las puntuaciones finales que obtuvieron 48 estudiantes en un examen de química orgánica.

63	73	40	77	65	70	58	75
86	90	55	72	73	56	76	69
94	66	84	53	75	89	42	64
65	47	62	88	48	84	77	89
76	86	75	60	64	67	65	69
33	79	69	76	35	49	96	73



2. Las masas en kilogramos de 50 reses destinadas al rastro de Monterrey, Nuevo León son:

336	392	315	318	321	337	365	380	375	345
319	365	381	329	387	358	370	387	370	356
327	353	310	326	318	382	394	358	400	388
346	326	359	360	305	362	376	343	395	363
376	335	317	302	346	379	324	354	335	348



Actividades de cierre

Después de haber explicado el ejemplo anterior con datos enteros y de realizar los ejercicios en las actividades de desarrollo, reforzaremos el tema de la construcción de tablas de distribución de frecuencias, pero con variables continuas, es decir, con datos que contienen 1, 2 o más decimales.

Ejemplos:

1. Los porcentajes de consumo nacional de la producción de trigo durante los últimos 60 años se registran en la siguiente tabla:

72.7	72.5	71.8	77.9	69.8	73	88.9	78.5	73.2	58.7
67.3	67.6	69.6	76.8	72.6	84.6	91.4	69.9	61.4	62.3
69.3	70.1	77.3	80.4	76.5	66.7	83.9	78.6	69.2	68.5
74.6	68.2	73.9	79.1	78.1	87.4	78.4	57.9	65.3	71.7
66.1	75.3	74.7	79.8	82.3	61.6	84.1	62.4	54.8	74.2
65.6	73.4	71.2	81.6	64.2	79.2	89.7	63.7	59.2	64.9

Construye una distribución de frecuencias de los porcentajes, utilizando intervalos de clase adecuados.

a) Después de ordenar los datos en forma creciente tenemos:

Dato menor	54.8	62.3	65.6	68.5	70.1	72.7	74.6	77.9	79.2	84.1
	57.9	62.4	66.1	69.2	71.2	73	74.7	78.1	79.8	84.6
	58.7	63.7	66.7	69.3	71.7	73.2	75.3	78.4	80.4	87.4
	59.2	64.2	67.3	69.6	71.8	73.4	76.5	78.5	81.6	88.9
	61.4	64.9	67.6	69.8	72.5	73.9	76.8	78.6	82.3	89.7
	61.6	65.3	68.2	69.9	72.6	74.2	77.3	79.1	83.9	91.4
										Dato mayor



b) Su rango es:

$$R = X_M - X_m$$

$$R = 91.4 - 54.8$$

$$R = 36.6$$

c) Selección del número de intervalo de clase por medio de la ecuación:

$$C = \frac{R}{NC}$$

$C = \frac{36.6}{5} = 7.32$ Este NC no es factible, recordemos que buscamos un resultado en el que se pueda redondear al inmediato superior.

$$C = \frac{36.6}{6} = 6.1 \qquad C = \frac{36.6}{7} = 5.22$$

$C = \frac{36.6}{8} = 4.75 \approx 4.8$ Este es el que seleccionamos, ya que se redondea hacia arriba, si se observa como estamos tratando con datos que tienen un decimal, también el redondeo se hace para que nos quede un solo decimal.

NOTA: También se pudiera considerar otra opción, ya que si tomamos 10 clases quedaría el resultado de la división 3.66, que se redondea a 3.7, esta elección depende del analista de acuerdo a lo que quiere observar con la información.

d) Formemos los intervalos de clases:

Como ya se explicó en el ejemplo anterior, primero formamos el límite inferior de cada intervalo de clase, sumando **4.8** al dato menor que es **54.8** y considerando **8 clases** o intervalos. Se van sumando sucesivamente. Al igual que en el ejemplo anterior, agregamos una clase más $88.4+4.8= 93.2$; verificamos que el resultado es mayor al dato mayor de **91.4**, así que la agrupación está correcta.

Intervalos de clase (Porcentajes de producción de trigo)	
Límite inferior	Límite superior
54.8	$59.6-0.1= 59.5$
$54.8+4.8= 59.6$	$64.4-0.1= 64.3$
$59.6+4.8= 64.4$	$69.2-0.1= 69.1$
$64.4+4.8= 69.2$	$74.0-0.1= 73.9$
$69.2+4.8= 74.0$	$78.8-0.1= 78.7$
$74.0+4.8= 78.8$	$83.6-0.1= 83.5$
$78.8+4.8= 83.6$	$88.4-0.1= 88.3$
$83.6+4.8= 88.4$	$93.2-0.1= 93.1$



Continuamos y formaremos el límite superior de cada intervalo de clase. En el ejemplo anterior se restaba la unidad a cada límite inferior porque los datos son números enteros, en este ejemplo restaremos **0.1** a cada límite inferior ya que los datos observados tienen un decimal. Para el último límite superior tomamos el valor del límite inferior que agregamos de más que es **93.2**.

Ahora sí ya tenemos todos los intervalos, cabe aclarar, que en este ejemplo, no nos queda como límite superior el dato mayor **91.4**, lo importante es que este dato esté siempre dentro del último intervalo de clase.

e) Se construye la tabla de distribución de frecuencias:

Primera columna: Anotamos los intervalos de clase que formamos en el inciso anterior, y como encabezado Porcentaje de producción ya que son los datos que se están observando.

Porcentaje de producción	Número de Años (f)	Marca de clase (X)
54.8 - 59.5	4	57.15
59.6 - 64.3	6	61.95
64.4 - 69.1	9	66.75
69.2 - 73.9	16	71.55
74.0 - 78.7	12	76.35
78.8 - 83.5	6	81.15
83.6 - 88.3	4	85.95
88.4 - 93.1	3	90.75
	N= 60	

Segunda columna: En la tabla de datos ordenados del inciso b), contamos el número de datos que pertenecen a cada uno de los intervalos de clase y así obtener la frecuencia absoluta. No se olviden de tomar en cuenta todos los datos, aunque éstos estén varias veces.

Columna tres: Obtenemos por medio de su ecuación, la marca de clase o el punto medio de los intervalos o clases.

$$X_1 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{54.8 + 59.5}{2} = \frac{114.3}{2} = 57.15$$

$$X_2 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{59.6 + 64.3}{2} = \frac{123.9}{2} = 61.95$$

$$X_3 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{64.4 + 69.1}{2} = \frac{133.5}{2} = 66.75$$

$$X_4 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{69.2 + 73.9}{2} = \frac{143.1}{2} = 71.55$$

$$X_5 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{74.0 + 78.7}{2} = \frac{152.7}{2} = 76.35$$

$$X_6 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{78.8 + 83.5}{2} = \frac{162.3}{2} = 81.15$$

$$X_7 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{83.6 + 88.3}{2} = \frac{171.9}{2} = 85.95$$

$$X_8 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{88.4 + 93.1}{2} = \frac{181.5}{2} = 90.75$$

Anotamos todos los resultados de la marca de clase en su respectiva columna. Cabe aclarar que estos datos no se redondean.



2. La siguiente tabla muestra los diámetros interiores de 40 inyectores para motor diesel producidos por una compañía; éstos están registrados con aproximación de milésimas de pulgada. Construye la tabla de distribución de frecuencias.

0.438	0.441	0.435	0.431	0.426	0.437	0.428	0.424
0.429	0.444	0.44	0.436	0.436	0.439	0.439	0.437
0.443	0.436	0.446	0.433	0.442	0.434	0.435	0.43
0.44	0.434	0.439	0.432	0.437	0.438	0.437	0.442
0.436	0.432	0.434	0.43	0.435	0.433	0.431	0.438

a) Después de ordenar los datos en forma creciente, se tiene:

0.424	0.43	0.433	0.435	0.436	0.437	0.439	0.442
0.426	0.431	0.433	0.435	0.436	0.438	0.439	0.442
0.428	0.431	0.434	0.435	0.437	0.438	0.44	0.443
0.429	0.432	0.434	0.436	0.437	0.438	0.44	0.444
0.43	0.432	0.434	0.436	0.437	0.439	0.441	0.446

b) Su rango es:

$$R = X_M - X_m$$

$$R = 0.446 - 0.424$$

$$R = 0.022$$

c) Selección del número de intervalo de clase por medio de la ecuación:

$$C = \frac{R}{NC}$$

$C = \frac{0.022}{5} = 0.0044$ Este NC no es factible, recordemos que buscamos un resultado en el que se pueda redondear al inmediato superior.

$C = \frac{0.022}{6} = 0.0036 \approx 0.004$ Este es que seleccionamos, ya que se redondea hacia arriba, si se observa como estamos tratando con datos que tienen 3 decimales, también el redondeo se hace para que nos queden tres decimales.

NOTA: Recuerden que se puede seleccionar cualquier otra opción en la que se pueda redondear al inmediato superior.

d) Formemos los intervalos de clases:

Como ya se explicó en el ejemplo anterior, primero formamos el límite inferior de cada intervalo de clase, sumando **0.004** al dato menor que es **0.424** y considerando **6 clases** o intervalos. Se van sumando sucesivamente. Al igual que en el ejemplo anterior, agregamos una clase más $0.444 + 0.004 = 0.448$; verificamos que el resultado es mayor al dato mayor de **0.446**, así que la agrupación está correcta.



Intervalos de clase (Porcentajes de producción de trigo)	
Límite inferior	Límite superior
0.424	0.428-0.001= 0.427
0.424+0.004= 0.428	0.432-0.001= 0.431
0.428+0.004= 0.432	0.436-0.001= 0.435
0.432+0.004= 0.436	0.440-0.001= 0.439
0.436+0.004= 0.440	0.444-0.001= 0.443
0.440+0.004= 0.444	0.448-0.001= 0.447

Continuamos y formaremos el límite superior de cada intervalo de clase. En el ejemplo anterior se restaba **0.1** a cada límite inferior ya que los datos observados tienen un decimal. En este ejemplo restaremos **0.001**, porque estamos tratando con datos de 3 decimales.

Para el último límite superior tomamos el valor del límite inferior que agregamos de más que es **0.448**.

Ahora sí, ya tenemos todos los intervalos, cabe aclarar, que en este ejemplo, no nos queda como límite superior el dato mayor **0.446**, lo importante es que este dato esté siempre dentro del último intervalo de clase.

e) Se construye la tabla de distribución de frecuencias:

Primera columna: Anotamos los intervalos de clase que formamos en el inciso anterior, y como encabezado Diámetros en pulgadas ya que son los datos que se están observando.

Segunda columna: En la tabla de datos ordenados del inciso b), contamos el número de datos que pertenecen a cada uno de los intervalos de clase y así obtener la frecuencia absoluta. No se olviden de tomar en cuenta todos los datos, aunque éstos estén varias veces.

Columna tres: Obtenemos por medio de su ecuación, la marca de clase o el punto medio de los intervalos o clases.

Diámetros en pulgadas	Número inyectores (f)	Marca de clase (x)
0.424 - 0.427	2	0.4255
0.428 - 0.431	6	0.4295
0.432 - 0.435	10	0.4335
0.436 - 0.439	14	0.4375
0.440 - 0.443	6	0.4415
0.444 - 0.447	2	0.4455
N= 40		

$$X_1 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{0.424 + 0.427}{2} = \frac{0.851}{2} = 0.4255$$

$$X_4 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{0.436 + 0.439}{2} = \frac{0.875}{2} = 0.4375$$

$$X_2 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{0.428 + 0.431}{2} = \frac{0.859}{2} = 0.4295$$

$$X_5 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{0.440 + 0.443}{2} = \frac{0.883}{2} = 0.4415$$

$$X_3 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{0.432 + 0.435}{2} = \frac{0.867}{2} = 0.4335$$

$$X_6 = \frac{L_i + L_s}{2} = \frac{0.444 + 0.447}{2} = \frac{0.891}{2} = 0.4455$$



Anotamos todos los resultados de la marca de clase en su respectiva columna. Cabe aclarar que estos datos no se redondean.

Ejercicios:

- Los siguientes son los diámetros, en pulgadas, de 42 tubos requeridos para perforar en primera fase, igual número de pozos petroleros en el sureste de la República Mexicana.

Construye la tabla de distribución de frecuencias. La ordenación de los datos deberá ser en forma creciente.

23.3	22	22.6	25.9	25.6	23.8	26.0
24.2	23.5	23.7	21.8	23.8	22.7	25.2
25.4	25.2	24.2	26.3	24.2	22.9	23.4
24.6	25.8	22.3	25.1	25.4	23.6	24.1
26.7	24.4	25.6	24.8	24.9	24.7	25.2
23.6	26.1	24.8	25.4	23.9	22	22.6

- Los diámetros interiores de 63 arandelas fabricadas por una compañía, que se miden en pulgadas, son:

0.583	0.571	0.574	0.582	0.565	0.574	0.580	0.549	0.548
0.582	0.568	0.573	0.553	0.584	0.568	0.576	0.552	0.572
0.554	0.592	0.593	0.571	0.577	0.546	0.554	0.553	0.586
0.548	0.573	0.581	0.564	0.563	0.568	0.575	0.582	0.576
0.563	0.563	0.593	0.572	0.558	0.589	0.591	0.555	0.544
0.542	0.580	0.564	0.589	0.590	0.593	0.563	0.559	0.560
0.592	0.566	0.552	0.590	0.580	0.584	0.584	0.557	0.586

Construye la tabla de distribución de frecuencias con los datos de la tabla anterior. Ordena los datos en forma ascendente.



Ejercicios Adicionales

Realiza los siguientes ejercicios como reforzamiento de los temas vistos anteriormente.

Instrucciones: Construye la tabla de distribución de frecuencias de los datos que se te proporcionan. Ordena de forma ascendente.

- Los siguientes datos representan los ingresos en miles de pesos de 56 personas de una cierta compañía.

28	23	19	19	18	23	20	20
27	21	23	17	15	16	19	19
17	31	18	17	25	13	20	17
24	26	22	26	11	19	15	23
24	20	24	21	22	21	19	25
17	23	20	18	27	24	20	29
22	21	12	21	26	16	16	17

- Los siguientes datos representan las ventas en millones de pesos de 60 compañías en el ramo textil.

35	35	33	24	28	21	37	13	6	23
18	24	28	31	12	14	45	33	28	26
29	22	43	10	43	43	24	19	9	35
42	36	23	33	21	21	29	11	32	14
17	19	21	13	38	23	19	34	25	7
11	9	36	4	30	29	29	18	36	10

- En la siguiente tabla de datos están representadas las estaturas en metros de 64 niños menores de 7 años.

0.06	0.90	0.08	0.65	0.07	0.17	0.28	0.72
0.78	0.51	0.61	0.86	0.60	0.76	0.53	0.16
0.88	0.68	0.96	0.77	0.41	0.74	0.08	0.67
0.46	0.37	0.47	0.86	0.45	0.06	0.82	0.81
0.55	0.96	0.60	0.59	0.52	0.21	0.41	0.45
0.87	0.99	0.07	0.17	0.45	0.59	0.52	0.61
0.53	0.46	0.45	0.28	0.38	0.35	0.62	0.17
0.16	0.57	0.20	0.82	0.65	0.72	0.99	0.20



1.6 Representación gráfica e interpretación.



Introducción

Uno de los objetivos de la estadística es comunicar los resultados de una investigación de manera clara y concisa, las representaciones gráficas de esos resultados obedecen a esta intención.



Actividades de Apertura



Una forma de comunicar una gran cantidad de temas es usar las gráficas, las vemos a diario para decirnos si va subiendo o bajando el dólar, la gasolina, los contagios por CoVid-19, los índices de obesidad, desempleo, entre otros.

En los medios de comunicación se usan con mayor frecuencia las gráficas que las tablas estadísticas, ya que la mayoría de la población no comprende las tablas y mucho menos lee un texto o artículo que trate de temas que incluya información estadística de utilidad.

¿Sabes cuál es uno de los países con mayor índice de pobreza entre los miembros de OCDE? Otra pista es uno de los primeros lugares en consumo de refresco, otra pista sus habitantes ocupan uno de los primeros lugares en obesidad. Toda esta información casi siempre se muestra en gráficas estadísticas.



Actividades de Desarrollo

Una vez concentrados los datos en una tabla, se puede hacer la representación gráfica correspondiente. Un Gráfico Estadístico es la representación de los datos estadísticos por medio de figuras geométricas (puntos, líneas, rectángulos, etc.) cuyas dimensiones son proporcionales al valor numérico de los datos.

El gráfico es útil para dar una rápida idea de la situación general que se está analizando, permite determinar con un simple vistazo máximos, mínimos, variaciones del fenómeno y determinar soluciones.

1.6.1. Histograma.

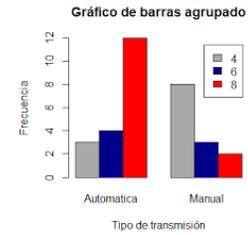
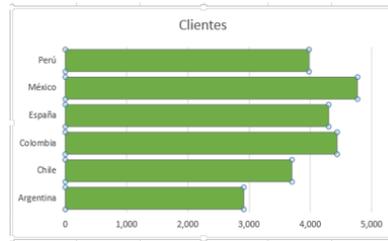
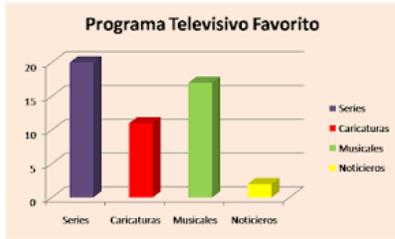


Un histograma es la representación de la información mediante una gráfica en forma de barras, sin espacios entre ellas, esta imagen nos permite apreciar visualmente la distribución de un conjunto de datos. Los histogramas son de utilidad para darnos una idea general de la distribución de una población o muestra.



a) Gráfico de Barras.

La construcción de este gráfico se basa en la representación de un valor numérico por un rectángulo. Las barras son usualmente verticales, pero también pueden ser horizontales o compuestas.

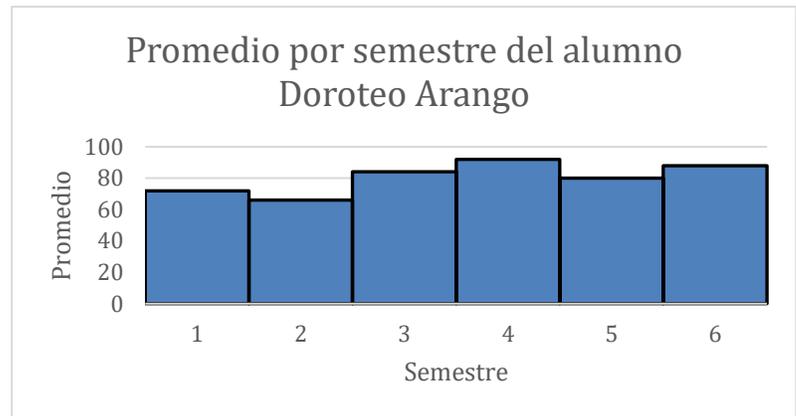


Ejemplo 1.

De la tabla siguiente construye un histograma:

Promedio por semestre del alumno Doroteo Arango

Semestre	Promedio
1	72
2	66
3	84
4	92
5	80
6	88



1.6.1.1 Frecuencias absolutas

Cuando se grafican a mano las frecuencias, es mucho más sencillo graficar las frecuencias con sus valores originales (valores absolutos), cuando los cálculos y graficación se realizan en una hoja de cálculo o software similar, la dificultad es la misma.

1.6.1.2 Frecuencias relativas

El trabajar con las frecuencias relativas implica el uso de porcentajes y en muchos casos el uso de decimales. Cuando se grafican a mano las frecuencias relativas es menos sencillo que sus valores originales (valores absolutos). La forma de los histogramas es la misma, solo cambian los valores del eje Y.

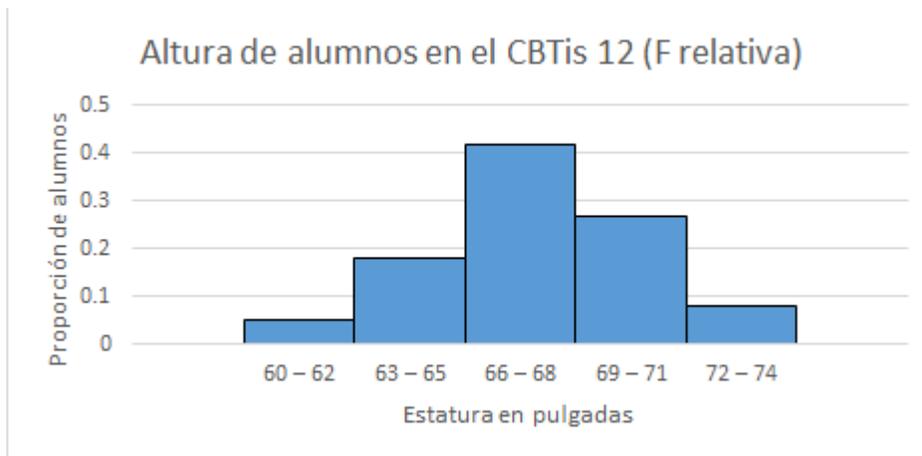
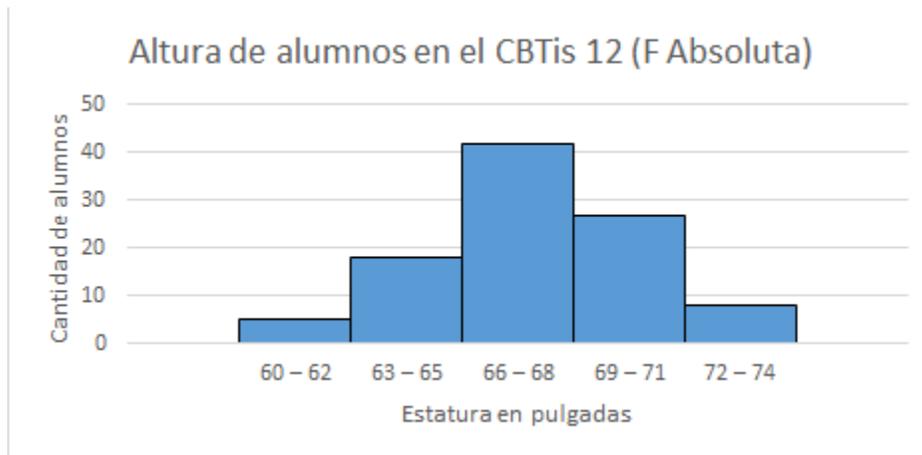


Ejemplo comparativo entre Frecuencias absolutas y relativas.

Altura de 100 estudiantes del CBTIS 12

Altura (pulg)	Cantidad	F relativa	F relativa (%)
60 – 62	5	0.05	5%
63 – 65	18	0.18	18%
66 – 68	42	0.42	42%
69 – 71	27	0.27	27%
72 – 74	8	0.08	8%
	N= 100	N= 1.00	N= 100%

Las gráficas de la tabla anterior serían, primeramente la de frecuencia absoluta y después la frecuencia relativa.





1.6.2. Polígono de Frecuencias

Para complementar el histograma, podemos unir los centros de las barras sobre el eje “x”, es decir las marcas de clase, además de prolongar estas marcas a línea inferior y superior. Al conjunto de esta poligonal se le denomina “**polígono de frecuencias**”.

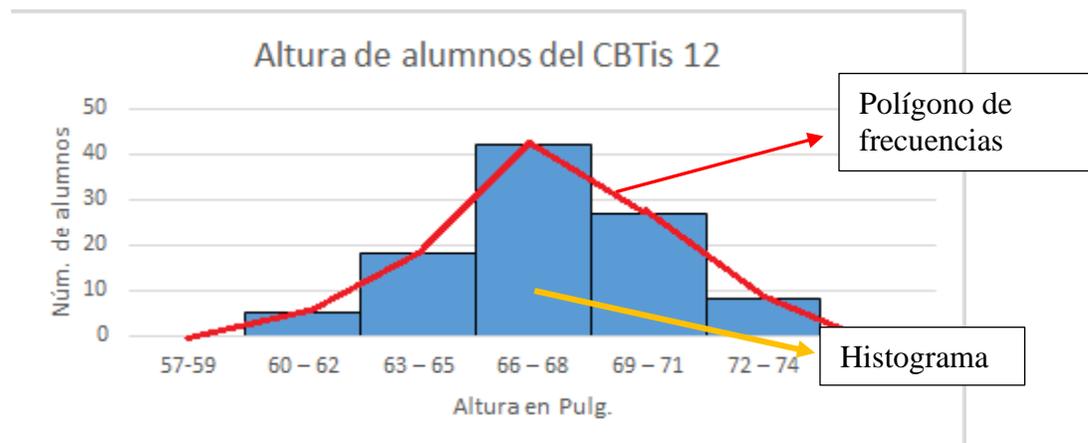
Ejemplo 2. De la tabla siguiente construye el histograma.

Altura de 100 estudiantes del CBTIS 12

Altura (pulg)	Cantidad
60 – 62	5
63 – 65	18
66 – 68	42
69 – 71	27
72 – 74	8

Primeramente, se determinan las **marcas de clase**:

$X_1 = \frac{60+62}{2} = 61$, $X_2 = \frac{63+65}{2} = 64$, $X_3 = \frac{66+68}{2} = 67$, $X_4 = \frac{69+71}{2} = 70$, $X_5 = \frac{72+74}{2} = 73$, también se determina la inferior y superior, que son 58 y 76



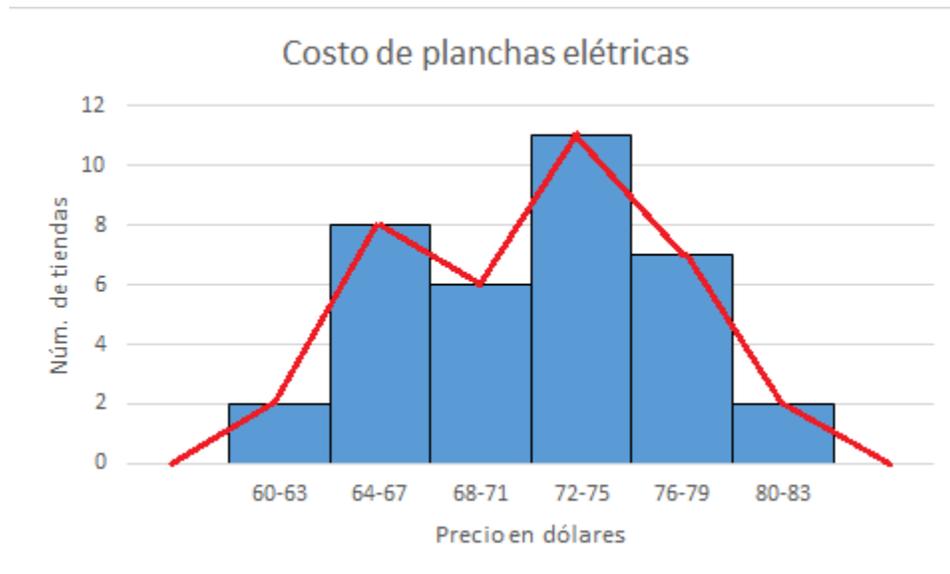
Ejemplo 3. La siguiente tabla muestra el costo de planchas eléctricas en dólares, elabora su histograma con su polígono de frecuencia.

Costo	No. de tiendas	Fa
60 - 63	2	2
64 - 67	8	10
68 - 71	6	16
72 - 75	11	27
76 - 79	7	34
80 - 83	2	36
Suma	36	



Marca de clase:

$$X_1 = \frac{60+63}{2} = 61.5, \quad X_2 = \frac{64+67}{2} = 65.5, \quad X_3 = \frac{68+71}{2} = 69.5, \quad X_4 = \frac{72+75}{2} = 73.5, \quad X_5 = \frac{76+79}{2} = 77.5, \\ X_6 = \frac{80+83}{2} = 81.5; \text{ inferior } 57.5, \text{ superior } 85.5$$



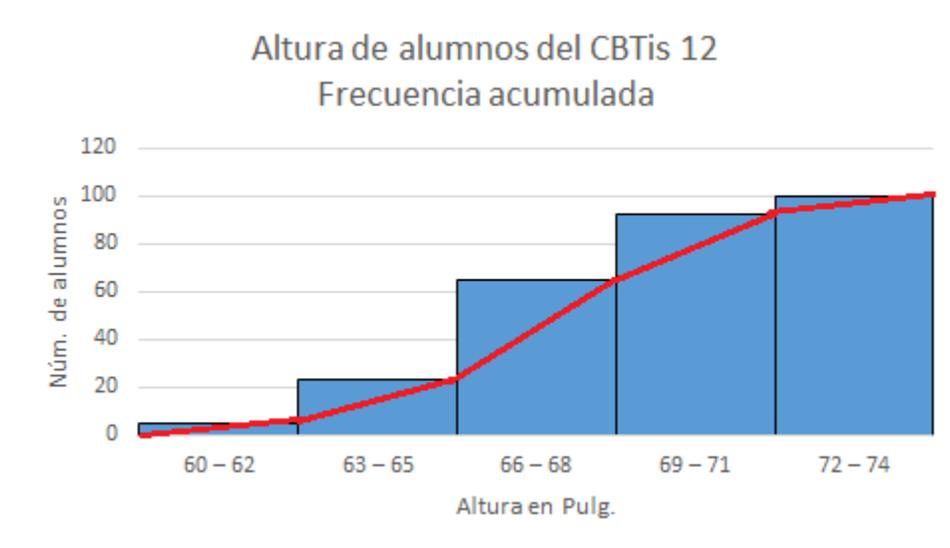
1.6.3. Ojiva.

La ojiva es similar al polígono de frecuencias, solo que en lugar de usar la parte media de las barras en su elaboración, usaremos el vértice inferior izquierdo del primer rectángulo y lo unimos con una línea hasta el vértice superior derecho del primer rectángulo, continuamos la línea hasta el vértice superior derecho del siguiente rectángulo y así sucesivamente. La segunda diferencia es el uso de las frecuencias acumuladas.

Ejemplo 4. De la tabla del ejemplo 2, construye la ojiva usando la frecuencia acumulada.

Altura de 100 estudiantes del CBTIS 12

Altura (pulg)	Cantidad	Fa
60 – 62	5	5
63 – 65	18	23
66 – 68	42	65
69 – 71	27	92
72 – 74	8	100
Suma	100	



1.6.4. Gráfico Circular, de sectores o Pastel

Es una forma alternativa del gráfico de barras, en su construcción se utiliza una circunferencia dividida en sectores angulares proporcional al valor de la variable. Es conveniente usar las fra para facilitar su trazo



Ejemplo 1. De la tabla anterior construye un gráfico circular con los promedios.

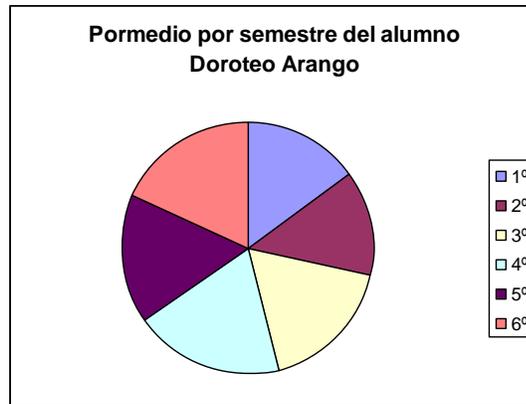
Procedimiento: Utilizaremos como opción el uso de la regla de 3 (razones y proporciones).

$$\frac{360^\circ}{x} = \frac{482}{72} \rightarrow x = 53.77^\circ \cong 54^\circ \quad (\text{Se requiere transportador para trazar})$$

De igual forma podremos calcular los ángulos para los siguientes promedios.

$$66 - 49^\circ \quad 84 - 63^\circ \quad 92 - 69^\circ \quad 80 - 60^\circ \quad 88 - 65^\circ$$

Otra opción es utilizar las frecuencias relativas acumuladas y utilizar el 100% como toda la circunferencia.



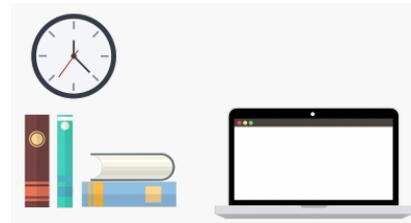
Nota: Si contamos con una hoja electrónica de cálculo (Excel), el programa nos puede hacer cualquier gráfica, pero debemos saber hacerla usando instrumentos de dibujo.

EJERCICIO 1:

La antigüedad en años de trabajo de un conjunto de docentes es la siguiente, según el departamento de Recursos Humanos del CBTIS 12 en 2006, como se muestra en la siguiente tabla.

Con ellos traza un HISTOGRAMA CON POLÍGONO DE FRECUENCIAS Y EN EL SEGUNDO ESPACIO UNA OJIVA USANDO EL Fa

Años	Cantidad	fr %	fa	fra %
3 – 5	5	20	5	20
6 – 8	6	24	11	44
9 – 11	7	28	18	72
12 – 14	7	28	25	100







Actividades de cierre



Como te pudiste dar cuenta, el trazo de una gráfica usando tu juego de geometría, puede ser una actividad muy bonita, pero laboriosa.

Las gráficas pueden imprimirles calidad y profesionalismo a tus trabajos, de igual forma, pueden ayudarte a argumentar tu postura en una exposición.

Nuevamente, te invitamos a que apliques las herramientas como la hoja de cálculo (Excel), que te permitiría hacer esto en una fracción del tiempo. Es importante que vayas relacionando lo aprendido en cada área del conocimiento con lo que ya conoces.

¡Date la oportunidad de ejercitar tus habilidades digitales!



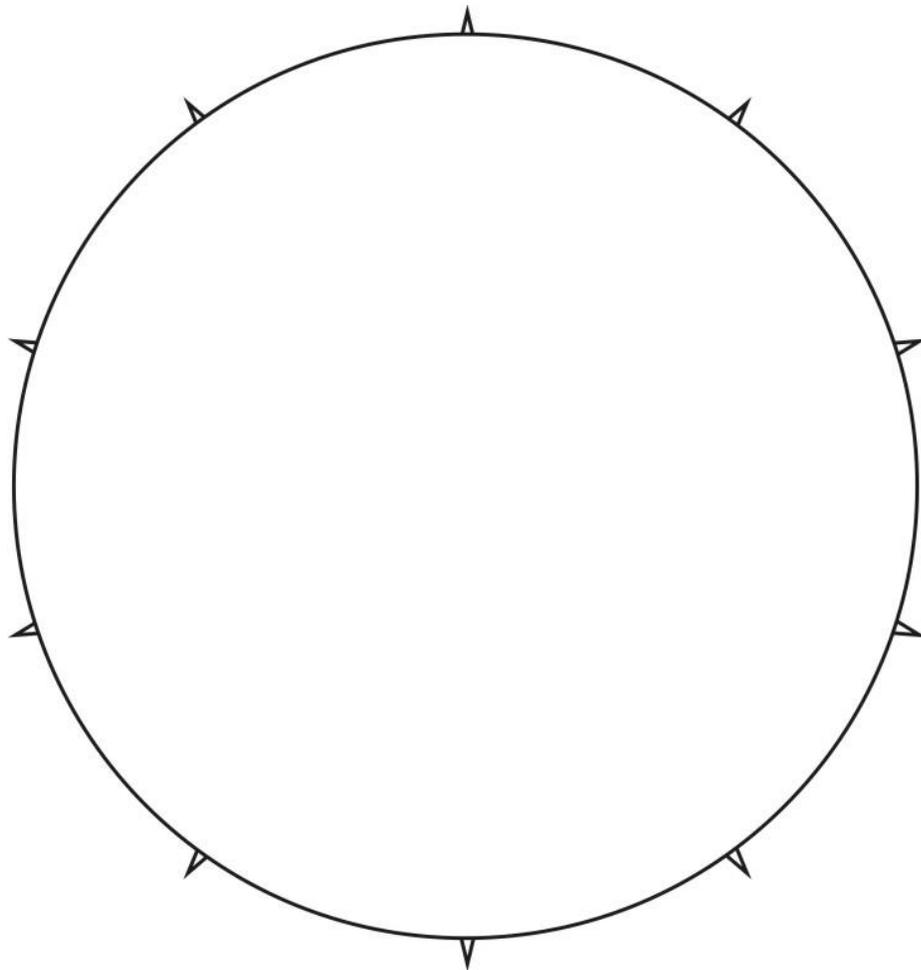
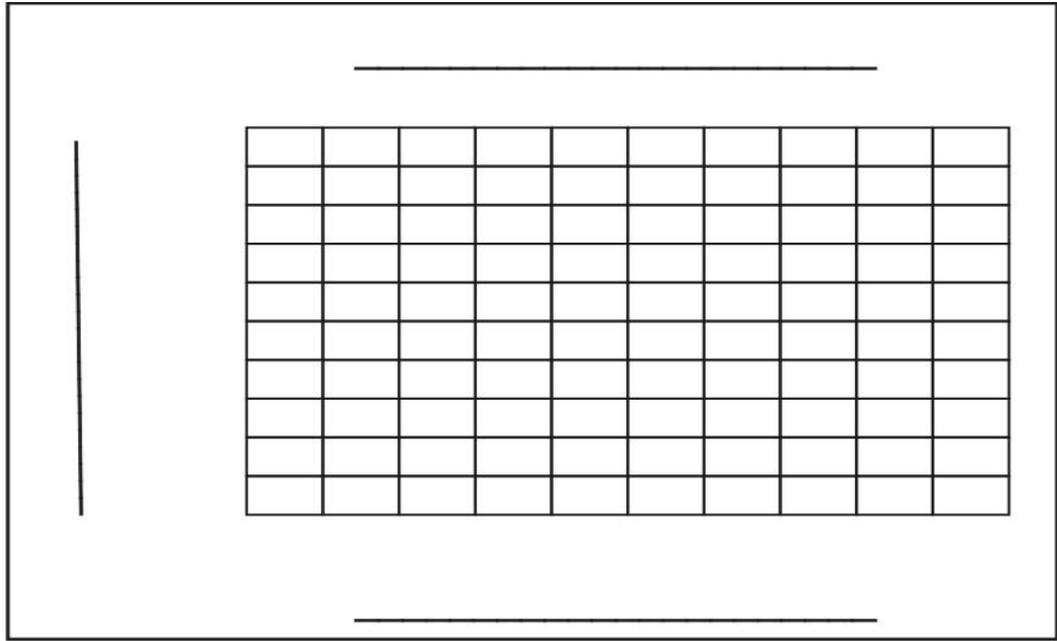
Ejercicios Adicionales

EJERCICIO 2: Con la siguiente información contenida en la tabla estadística, construye un HISTOGRAMA Y UNA GRÁFICA CIRCULAR (se recomienda usar el fra)

Las películas exhibidas en el DF según su nacionalidad en 1988 sin contar las de EUA son: mexicanas 705, alemanas 75, francesas 176, inglesas 71, italianas 142, otras 399, fuente Anuario Estadístico 1990.

Nacionalidad	Películas	fr %	fa	fra %
Mexicana	705	44.96%	705	44.96%
Alemana	75	4.78%	780	49.74%
Francesa	176	11.22%	956	60.97%
Inglesa	71	4.53%	1027	65.50%
Italiana	142	9.06%	1169	74.55%
Otras	399	25.45%	1568	100.00%







Bloque 2 | Medidas de tendencia central

2.1 Media



Introducción

La tendencia central se refiere al punto medio de una distribución. Las medidas de tendencia central se conocen también como medidas de posición. Las tres medidas de tendencia central o de centralización más importantes son la Media Aritmética o media, Mediana y Moda.

Media



Un valor que es simbólico y representativo de un conjunto de datos se denomina promedio. Se hace notar que en un conjunto de datos ordenados de acuerdo con su magnitud, el promedio siempre tiende a situarse en el centro de dicho conjunto, razón por la cual los promedios se denominan también medidas de centralización o de tendencia central.

2.1.1. Media aritmética

Es el promedio más utilizado y por lo general se denomina media. La media aritmética o media de un conjunto de elementos se define como la suma de los valores de estos elementos dividido entre el número total de ellos. Se simboliza \bar{X} (léase \bar{X} barra), para **datos no agrupados**, matemáticamente se determina por la ecuación:

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_N}{N}$$

Donde:

\bar{X} = Media aritmética o media.

X = Valor de cada elemento.

N = Número total de elementos.

Ejemplo:

Determina la media aritmética de los números 18, 13, 15, 22 y 20.

$$\bar{X} = \frac{18 + 13 + 15 + 22 + 20}{5} = \frac{88}{5} = 17.6$$



Media aritmética para datos agrupados.

Cuando los datos se presentan agrupados mediante una distribución de frecuencias, todos los valores caen dentro de los intervalos de clase dados que se consideran coincidentes con las marcas de clase o puntos medios de cada intervalo, es decir, las ponderaciones son las frecuencias y las marcas de clase o puntos medios son los valores que se ponderan.

En una distribución de frecuencias para datos agrupados, la media aritmética se determina al multiplicar las distintas marcas o puntos medios de clase por sus respectivas frecuencias de clase; se suman los productos y el resultado se divide entre el número total de frecuencias. Matemáticamente se representa:

$$\bar{X} = \frac{\sum f X}{N}$$

Donde:

\bar{X} = Media aritmética o media.

X = Marcas o puntos medios de clase.

f = Frecuencia total de clase.

N = Número total de frecuencias.

Ejemplo:

La siguiente tabla de distribución de frecuencias representan las edades de los 96 asistentes a un curso de informática.

Intervalos (edades)	Frecuencias (asistentes)	Marca de clase (X)	f X
24 - 28	26	8	208
29 - 33	31	17	527
34 - 38	36	29	1 044
39 - 43	11	23	943
44 - 48	46	15	690
49 - 53	51	4	204
	N= 96		$\sum f X = 3 616$

Al sustituir los datos anteriores en la ecuación para la media aritmética resulta:

$$\bar{X} = \frac{\sum f X}{N} = \frac{3 616}{96} = 37.666$$

La media aritmética de las edades es **37.666 años**.



2.2 Mediana y Moda

2.2.1 Mediana



Se define como el **valor medio** a aquel que divide a un conjunto de datos que se ordena de acuerdo con su magnitud (de forma ascendente o de forma descendente) en dos partes iguales, es decir, es aquel valor central que deja por debajo igual número de elementos que por arriba de él.

Si el conjunto de elementos ordenados de acuerdo con su magnitud, es **impar**, la mediana será el valor intermedio de dicha sucesión. Si el conjunto de elementos ordenados de acuerdo con su magnitud es **par**, la mediana será la media aritmética de los dos elementos medios.

Ejemplos:

1. Determina la mediana de los números 25, 29, 24, 29, 27, 25, 29, 31, 26

Solución:

Al ordenar ascendentemente el conjunto de elementos numéricos dado tenemos:

$$24, 25, 25, 26, \mathbf{27}, 29, 29, 29, 31$$

Por definición, la mediana de los números es el valor central, en este caso es **27**.

2. Determina la mediana de los números 49, 38, 46, 40, 36, 42, 36, 43

Solución:

Al ordenar descendientemente el conjunto de elementos numéricos dado se tiene:

$$49, 46, 43, \mathbf{42, 40}, 38, 36, 36$$

La mediana es la media aritmética de los números 42 y 40, es decir:

$$Med = \frac{42 + 40}{2} = 41$$

La mediana del conjunto de elementos numéricos dados es **41**

Mediana para datos agrupados.

Para determinar la mediana en datos agrupados se emplea el método de la interpolación, es decir, se fundamenta de la suposición de que los elementos en la **clase mediana** (es la clase en la cual se localiza el valor de la mediana) están distribuidos uniformemente en todo el intervalo.



El cálculo de la mediana de una distribución de frecuencias se determina matemáticamente por la ecuación:

$$Me = LR_1 + \left[\frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f_{med}} \right] C$$

Donde:

LR_1 = Límite real inferior de la clase mediana, es decir, la clase que contiene el valor de la mediana.

N = Número total de datos, es decir, la frecuencia total.

$\sum f_1$ = Suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase mediana.

f_{med} = Frecuencia de la clase mediana, la cual nunca debe ser mayor que $\frac{N}{2}$

C = El tamaño del intervalo de la clase mediana.

Ejemplo:

La siguiente tabla de distribución de frecuencias muestra las puntuaciones que obtuvieron durante el primer parcial 56 estudiantes en un examen de geometría analítica. Calcula la mediana.

Intervalos (puntuaciones)	Frecuencias (estudiantes)
45 - 51	1
52 - 58	3
59 - 65	7
66 - 72	12
73 - 79	15
80 - 86	9
87 - 93	6
94 - 100	3
$N = 56$	

Clase mediana → (pointing to the 73-79 interval) ← f_{med} (pointing to the frequency 15)

Solución:

Se localiza la clase mediana: $\frac{N}{2} = \frac{56}{2} = 28$

La suma de las frecuencias de las cuatro y cinco primeras clases es $1 + 3 + 7 + 12 = 23$ y $1 + 3 + 7 + 12 + 15 = 38$, respectivamente, por lo que es evidente que la mediana se encuentra en la quinta clase, qué será, por lo tanto, la clase mediana.

Entonces observamos los siguientes datos:

$$LR_1 = \frac{73 + 72}{2} = 72.5$$

$N = 56$

$\sum f_1 = 23$

$f_{med} = 15$

$C = 7$



Al sustituir los datos anteriores en la ecuación de la mediana, resulta:

$$Me = LR_1 + \left[\frac{\frac{N}{2} - \sum f_1}{f_{med}} \right] C = 72.5 + \left[\frac{\frac{56}{2} - 23}{15} \right] (7)$$

$$Me = 72.5 + \left[\frac{28 - 23}{15} \right] (7) = 72.5 + \left(\frac{5}{15} \right) (7)$$

$$Me = 72.5 + 2.33 = 74.83 \approx 75$$

La media de las puntuaciones calculada a partir de datos agrupados es 75

2.2.2 Moda



Se define como el valor que se presenta con la **mayor frecuencia**, es decir, es el **valor más común** de un conjunto de elementos numéricos dado.

Entre las características de la moda destacan que ésta puede no existir, incluso si existe puede no ser única. Si un conjunto de valores dado presenta una sola moda se denomina **unimodal**. Si presenta dos modas se denomina **bimodal**; si se presentan más de dos modas se denomina **multimodal**.

Ejemplo 1: Dado el siguiente conjunto de números 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20; determina su moda.

Solución: Analizando el conjunto de números dados, se observa que todos ellos tienen igual frecuencia, por lo que se concluye que no presenta moda, es decir, **no existe**.

Ejemplo 2: Dado el siguiente conjunto de números 3, 3, 4, 6, 8, 8, 8, 11, 11, 13, 15; determina su moda.

Solución: Analizar el conjunto de números dado, se observa que el número que se presenta con mayor frecuencia es el 8, por lo que se concluye que el valor de la **moda es 8** y el conjunto se denomina **unimodal**.

Ejemplo 3: Dado el siguiente conjunto de números 10, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 15, 15, 16, 17, 17, 17, 19; determina su moda.

Solución: Al analizar el conjunto de números dado, se observa que los números que se presentan con mayor frecuencia son el 12, 14 y 17, por lo que se concluye que los valores de la moda son **12, 14 y 17**, en donde el conjunto se denomina **multimodal**.



Moda para datos agrupados.

Para determinar la moda en datos agrupados se emplea el método de la interpolación, es decir, se fundamenta en encontrar primero la clase modal (es la clase en la cual se localiza el valor de la moda) que se caracteriza por tener la máxima frecuencia de la distribución.

El siguiente paso es determinar la diferencia absoluta entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase **premodal** o anterior; así mismo, la diferencia absoluta entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase **posmodal** o siguiente. Lo anterior es con el fin de observar hacia dónde se concentra el valor modal.

El cálculo de la moda de una distribución de frecuencias se determina matemáticamente por la ecuación:

$$Mo = LR_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) C$$

Donde:

LR_1 = Límite real inferior de la clase modal, es decir, la clase que contiene el valor de la moda.

Δ_1 = Es la diferencia absoluta entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase premodal o anterior.

Δ_2 = Es la diferencia absoluta entre la frecuencia de la clase modal y la frecuencia de la clase posmodal o siguiente.

C = Tamaño del intervalo de clase modal

Ejemplo 1:

La siguiente tabla de distribución de frecuencias agrupa los salarios semanales en miles de pesos de 130 empleados técnicos de la empresa TRW, división de cinturones de seguridad; determina la moda de dichos salarios.

Solución: Primero, se considera la tabla de distribución de frecuencias para localizar la clase modal que se caracteriza por tener la máxima frecuencia, y el valor de la moda que resulta ser (750 – 773).



Intervalos (salarios)	Frecuencias (empleados)
654 - 677	3
678 - 701	7
702 - 725	13
726 - 749	19
750 - 773	26
774 - 797	21
798 - 821	17
822 - 845	12
846 - 869	8
870 - 893	4
N= 130	

Clase modal →

← $\Delta_1 = 26 - 19 = 7$

← $\Delta_2 = 26 - 21 = 5$

También se observan los siguientes datos:

LR_1 = El límite real inferior de la clase modal se obtiene sumando el límite superior de un intervalo de clase y el límite inferior de intervalo de clase contiguo superior y dividido entre dos, es decir:

$$LR_1 = \frac{750 + 749}{2} = 749.5$$

$$LR_1 = 749.5$$

$$\Delta_1 = 26 - 19 = 7$$

$$\Delta_2 = 26 - 21 = 5$$

$$C = 23$$

Al sustituir los datos anteriores en la ecuación de la moda resulta:

$$Mo = LR_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \right) C = 749.5 + \left(\frac{7}{7 + 5} \right) (23) \quad (23)$$

$$Mo = 749.5 + 13.42 = 762.92$$

La moda de los salarios calculada a partir de datos agrupados es **762.92 miles de pesos**.



Actividades de Apertura

1. La siguiente tabla de distribución de frecuencias muestra el número de horas a la semana que 60 familias miran programas televisivos; determina la media aritmética.

Intervalos (horas)	Frecuencias (familias)	Marca de clase X	f _x
30 - 39	4		
40 - 49	9		
50 - 59	13		
60 - 69	19		
70 - 79	12		
80 - 89	3		
	N= 60		

$$\bar{X} = \frac{\sum f X}{N} =$$



Actividades de Desarrollo

1. Con los datos de la tabla de distribución de frecuencias anterior, calcula:

- a) La mediana por fórmula
- b) La moda
- c) Constuye el Histograma

Intervalos (horas)	Frecuencias (familias)
30 - 39	4
40 - 49	9
50 - 59	13
60 - 69	19
70 - 79	12
80 - 89	3
	<i>N</i> = 60



Actividades de cierre

1. Realiza la siguiente actividad en una hoja de cálculo Excel para determinar lo que se te solicita:

La siguiente tabla de Distribución de frecuencias registra el número de horas al mes que 180 miembros de un club altruista dedican a labores sociales en su comunidad.

Determinar:

- a) La media aritmética
- b) La mediana
- c) La moda
- d) Construye el Histograma



Intervalos (horas)	Frecuencias (miembros) f	Marca de clase X	f X
10 - 14	6		
15 - 19	14		
20 - 24	23		
25 - 29	28		
30 - 34	19		
35 - 39	11		
40 - 44	7		
	N= 108		$\sum f X =$

Solución:

a) $\bar{X} =$ _____ horas

b) $M_e =$ _____ horas

c) $M_o =$ _____ horas



Ejercicios Adicionales

Como reforzamiento de los temas vistos, realiza los siguientes ejercicios:

I. Resuelve los siguientes problemas para **Datos No Agrupados**.

- Determina la media aritmética, la mediana y la moda para los siguientes conjuntos de datos numéricos. Menciona también qué tipo de moda resulta en cada uno (unimodal, bimodal o multimodal).
 - 125, 116, 119, 121, 121, 124, 129
 - 8, 12, 16, 8, 10, 12, 10, 14, 10, 12, 10, 8, 10
- El costo de un litro de gasolina *magna sin* en diferentes municipios de la franja fronteriza de la República Mexicana, registrado en el año 2019 es: \$15.99, \$11.62, \$13.50, \$15.48, \$12.00, \$13.50. Determina:
 - La media aritmética de los costes.
 - La mediana de los costes.
 - La moda de los costes.
 - Indica el tipo de moda.
- Doce vendedores de autos usados vendieron en una semana, respectivamente, 59, 72, 86, 45, 64, 48, 69, 90, 43, 95, 64 y 81 automóviles. Determina:
 - La media aritmética.
 - La mediana.
 - La moda e indica el tipo de moda que resulta.



II. Resuelve los siguientes problemas para **Datos Agrupados**.

1. La tabla de distribución de frecuencias registra la cantidad de adultos en una población a partir de los 30 años, arrojando los siguientes resultados:

INTERVALO	FRECUENCIA f	MARCA DE CLASE X	$f X$
30 - 39	7		
40 - 49	12		
50 - 59	19		
60 - 69	16		
70 - 79	10		
80 - 89	6		
90 - 99	2		
	$N = 72$		$\sum f X =$

Calcula los valores de:

- a) La media aritmética
- b) La mediana
- c) La moda
- d) Construye el Histograma

2. En la siguiente tabla de distribución de frecuencias se muestran las estaturas de un grupo de 202 estudiantes. Calcule la media mediana, moda y construye el gráfico de histograma en una hoja de cálculo Excel.

INTERVALO (estaturas)	FRECUENCIA f	MARCA DE CLASE X	$f X$
152 - 156	25		
157 - 161	18		
162 - 166	36		
167 - 171	55		
172 - 176	53		
177 - 181	15		
	$N = 202$		

Soluciones:

- a) $\bar{X} =$ *de estatura*
- b) $M_e =$ *de estatura*
- c) $M_o =$ *de estatura*



2.3 Cuartiles, Deciles y Percentiles



Introducción



Dado un conjunto de elementos que se ordenan de acuerdo con su magnitud, el valor medio que divide al conjunto de datos en dos partes iguales o la media aritmética de los valores medios de dicho conjunto, dan como resultado a la mediana.

Asociadas a la definición de mediana, tenemos otras medidas que se fundamentan en las divisiones proporcionales que pueden hacerse en datos agrupados o sin agrupar y que se denominan cuartiles. Existen diferentes tipos: **Cuartiles, Deciles y Percentiles.**

2.3.1. Cuartiles

Se definen como los intervalos dentro de los cuales quedan proporcionalmente repartidos los datos sin agrupar o agrupados en una distribución formada por 4 partes iguales.

Se tienen 3 cuartiles que se simbolizan por Q_1 (primer cuartil), Q_2 (segundo cuartil) y Q_3 (tercer cuartil), en donde cada uno contendrá el mismo número de datos, es decir, el 25% del total.

Para determinar el valor de los cuartiles en **datos no agrupados**, aplicamos la expresión general $\frac{KN}{4}$ y las siguientes reglas:

- Si KN es divisible exactamente 4, el valor del cuartil buscado será la media aritmética entre el dato ordenado cuya posición se obtiene de $\frac{KN}{4}$ y el siguiente dato de orden.
- Si KN no es divisible exactamente entre 4, el valor del cuartil buscado será el dato ordenado cuya posición si obtiene de redondear al entero más próximo el resultado de $\frac{KN}{4}$.

El cálculo de los cuartiles de una **distribución de frecuencias o datos agrupados** se determina matemáticamente por la ecuación general:

$$Q_K = LR_1 + \left[\frac{\frac{KN}{4} - \sum f}{f_k} \right] C$$

Donde:

K = K -enésimo cuartil = Se refiere al primero, segundo y tercer cuartil, según sea el que se tenga que determinar.

LR_1 = Límite real inferior de la clase K -enésimo cuartil.

N = Número total de datos, es decir, la frecuencia total.

$\sum f$ = Suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase de K -enésimo cuartil.

f_k = Frecuencia de la clase del K -enésimo cuartil, la cual nunca debe ser mayor que $\frac{KN}{4}$

C = Tamaño del intervalo de la clase del K -enésimo cuartil.



2.3.2 Deciles



Se definen como los intervalos dentro de los cuales quedan proporcionalmente repartidos los datos sin agrupar o agrupados en una distribución formada por 10 partes iguales. Se tienen nueve deciles que se simbolizan por D_1 (primer decil), D_2 (segundo decil), D_3 (tercer decil), ..., D_9 (noveno decil), en donde cada uno contendrá el mismo número de datos, es decir, el 10% del total.

Para determinar el valor de los deciles en **datos no agrupados**, aplicamos la expresión general $\frac{KN}{10}$.

El cálculo de los deciles de una **distribución de frecuencias o datos agrupados** se determina matemáticamente por la ecuación general:

$$D_K = LR_1 + \left[\frac{\frac{KN}{10} - \sum f}{f_k} \right] C$$

Donde:

K = K -enésimo decil = Se refiere al primero, segundo, tercero, ..., noveno decil, según sea el que se tenga que determinar.

LR_1 = Límite real inferior de la clase K -enésimo decil.

N = Número total de datos, es decir, la frecuencia total.

$\sum f$ = Suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase de K -enésimo decil.

f_k = Frecuencia de la clase del K -enésimo decil, la cual nunca debe ser mayor que $\frac{KN}{10}$

C = Tamaño del intervalo de la clase del K -enésimo decil.

2.3.3 Percentiles



Se define como los intervalos dentro de los cuales quedan proporcionalmente repartidos los datos sin agrupar o agrupados en una distribución formada por cien partes iguales.

Se tienen noventa y nueve percentiles que se simbolizan por P_1 (primer percentil), P_2 (segundo percentil), P_3 (tercer percentil), ..., P_{99} (noventa y nueve percentil), en donde cada uno contendrá el mismo número de datos, es decir, el 1% del total.

Para determinar el valor de los percentiles en **datos no agrupados**, aplicamos la expresión general $\frac{KN}{100}$.



El cálculo de los percentiles de una distribución de frecuencias o datos agrupados se determina matemáticamente por la ecuación general:

$$P_K = LR_1 + \left[\frac{\frac{KN}{100} - \sum f}{f_k} \right] C$$

Donde:

K = K -enésimo percentil = Se refiere al primero, segundo, tercero,..., nonogésimo noveno percentil, según sea el que se tenga que determinar.

LR_1 = Límite real inferior de la clase K -enésimo percentil.

N = Número total de datos, es decir, la frecuencia total.

$\sum f$ = Suma de las frecuencias de todas las clases por debajo de la clase de K -enésimo percentil.

f_k = Frecuencia de la clase del K -enésimo percentil, la cual nunca debe ser mayor que $\frac{KN}{100}$

C = Tamaño del intervalo de la clase del K -enésimo percentil.

Ejemplo para datos no agrupados:

Para el siguiente conjunto de datos ordenados:

76, 77, 81, 82, 83, 88, 92, 95, 99, 102, 105, 107, 108, 110, 112, 116, 119, 123, 125, 128, 131, 135, 137, 140, 142, 146, 149, 152, 155, 158, 161, 164, 166, 168, 171.

Determina el Q_3 , D_6 y P_{70} .

Solución:

Como el conjunto tiene $N = 35$ datos:

a) $Q_3 = \frac{KN}{4} = \frac{3(35)}{4} = 26.25 \approx 26$ redondeado al entero más próximo.

b) $D_6 = \frac{KN}{10} = \frac{6(35)}{10} = 21$ el valor del D_6 será la media aritmética entre el 21° dato ordenado y el siguiente del conjunto, es decir,

$D_6 = \frac{131+135}{2} = 133$ El valor del D_6 es 133.

c) $P_{70} = \frac{KN}{100} = \frac{70(35)}{100} = 24.5 \approx 25$ redondeado al entero más próximo.



Ejemplo para datos agrupados:

La siguiente tabla de distribución de frecuencias registra los pesos en libras de 42 atletas mexicanos que participaron en los *XXIX Juegos Olímpicos* en Beijing en 2008.

Encuentra:

- a) Cuartil Q_1
- b) Decil D_9
- c) Percentil P_{65}

Intervalos (libras)	Frecuencias (atletas)
110 - 116	2
117 - 123	4
124 - 130	7
131 - 137	9
138 - 144	13
145 - 151	6
152 - 158	1
$N = 42$	

Solución:

a) Para determinar el primer cuartil Q_1 , usamos los siguientes datos:

Datos	Formula	Sustitución
-------	---------	-------------

$$\frac{KN}{4} = \frac{1(42)}{4} = 10.5$$

$$Q_1 = LR_1 + \left[\frac{\frac{KN}{4} - \sum f}{f_k} \right] C$$

$$Q_1 = 123.5 + \left[\frac{10.5 - 6}{7} \right] (7)$$

$$Q_1 = 123.5 + 4.5 = 128$$

$$LR_1 = \frac{123 + 124}{2} = 123.5$$

$$\sum f = 2 + 4 = 6$$

$$f_k = 7$$

$$C = 7$$

El valor del primer cuartil es 128 libras, es decir, 25% de los atletas pesa 128 libras o menos.

b) Para determinar el noveno decil D_9 , usamos los siguientes datos:

Datos	Formula	Sustitución
-------	---------	-------------

$$\frac{KN}{10} = \frac{9(42)}{10} = 37.8$$

$$D_9 = LR_1 + \left[\frac{\frac{KN}{10} - \sum f}{f_k} \right] C$$

$$D_9 = 144.5 + \left[\frac{37.8 - 35}{6} \right] (7)$$

$$D_9 = 144.5 + 3.27 = 147.77$$

$$LR_1 = \frac{144 + 145}{2} = 144.5$$

$$\sum f = 2 + 4 + 7 + 9 + 13 = 35$$

$$f_k = 6$$

$$C = 7$$

El valor del noveno decil es 147.77 libras, es decir, 90% de los atletas pesa 147.77 libras o menos.



c) Para determinar el sexagésimo quinto percentil P_{65} , usamos los siguientes datos:

Datos	Formula	Sustitución
-------	---------	-------------

$$\frac{KN}{100} = \frac{65(42)}{100} = 27.3$$

$$P_{65} = LR_1 + \left[\frac{\frac{KN}{100} - \sum f}{f_k} \right] C$$

$$P_{65} = 137.5 + \left[\frac{27.3 - 22}{13} \right] (7)$$

$$P_{65} = 137.5 + 2.85 = 140.35$$

$$LR_1 = \frac{137 + 138}{2} = 137.5$$

$$\sum f = 2 + 4 + 7 + 9 = 22$$

$$f_k = 13$$

$$C = 7$$

El valor del sexagésimo quinto percentil es 140.35 libras, es decir, 65% de los atletas pesa 143.75 libras o menos.



Actividades de Apertura

1. La siguiente tabla de distribución de frecuencias registra los tiempos en segundos que 35 atletas varones tardan en recorrer los 100 metros planos. Determina:

- Los cuartiles: Q_1 y Q_2 ;
- Los deciles: D_3 , D_6 y D_9
- Los percentiles P_{35} , P_{50} , P_{65} y P_{80} .

Intervalos (segundos)	Frecuencias (atletas)
8.8 - 9.2	2
9.3 - 9.7	5
9.8 - 10.2	13
10.3 - 10.7	9
10.8 - 11.2	6
	$N = 35$



Actividades de Desarrollo

1. Con los datos calculados de la tabla de distribución de frecuencias anterior:

Intervalos (segundos)	Frecuencias (atletas)	Marca de clase X
8.8 - 9.2	2	
9.3 - 9.7	5	
9.8 - 10.2	13	
10.3 - 10.7	9	
10.8 - 11.2	6	
	$N= 35$	

- Construye el Histograma porcentual indicando en la gráfica el valor de los cuantiles: Q_1 , D_6 y P_{80}
- Constuye el Polígono de frecuencias porcentual indicando en la gráfica el valor de los cuantiles: Q_2 , D_9 y P_{65}



Actividades de cierre

1. La siguiente tabla de distribución de frecuencias registra las calificaciones de un segundo examen parcial de Física II de un grupo de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

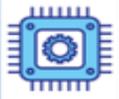
Determina:

- El cuartil Q_3
- Los deciles D_4 y D_7
- Los percentiles P_{25} , P_{50} y P_{90}

Intervalos (calificaciones)	Frecuencias (estudiantes)	Marca de clase X
30 - 39	1	
40 - 49	2	
50 - 59	4	
60 - 69	7	
70 - 79	11	
80 - 89	8	
90 - 100	3	
	$N= 33$	

Indica también:

- La calificación más baja lograda por el 20% superior de la clase.
- La calificación más alta lograda por el 25% inferior de la clase.
- ¿Cuál es la calificación del 50% de los alumnos?



Actividades de contexto o Transversales

Realiza la siguiente actividad en una hoja de cálculo Excel:

Los siguientes datos son el resultado de una encuesta realizada vía Facebook a 260 estudiantes para conocer el tiempo que emplean diariamente para realizar las tareas que sus maestros les encargan en línea por estos momentos de pandemia.

12	12	4	12	2	5	7	5	7	3	4	2	2	3
5	7	6	6	5	12	10	12	2	12	2	3	4	6
3	4	8	10	12	13	3	4	5	7	5	8	7	3
5	10	11	6	9	3	4	6	8	5	5	4	5	4
5	6	8	6	6	7	3	4	2	5	5	9	2	3
4	6	2	4	5	2	5	5	7	3	4	6	9	1
1	2	10	11	5	6	5	6	5	7	8	6	6	10
1	2	5	6	6	8	3	11	2	5	6	7	2	4
2	7	3	4	6	8	5	8	5	8	4	6	2	5
5	8	12	2	6	5	7	5	7	9	10	2	4	5
7	2	3	5	7	4	6	6	2	4	6	4	5	5
7	5	8	2	5	2	3	2	5	6	7	2	3	5
8	4	6	8	14	8	2	4	5	8	3	6	12	4
6	2	6	0	3	6	4	7	2	4	4	7	6	8
2	3	2	3	3	4	5	6	2	5	2	3	6	9
4	5	3	5	2	3	3	6	6	3	5	4	6	4
8	3	6	2	4	4	7	4	5	5	4	10	3	5
3	4	8	2	4	5	7	4	5	3	5	3	6	4
5	4	7	2	5	2	3	4						

A partir de ellos calcula en una hoja de excel:

1. Rango, Clases y Amplitud que te permitan...
2. Elaborar una tabla de distribución de frecuencias que contenga: Li, Ls, Marca de clase (X), frecuencia relativa (f), frecuencia relativa acumulada (fa), Frecuencia absoluta (F), Frecuencia absoluta acumulada (Fa), Porcentaje (%), Ojiva >, Ojiva <, Grados para la elaboración de la gráfica circular y el producto de la marca de clase por la frecuencia (Xf) para que te ayuden al cálculo de la media aritmética.
3. Realiza el cálculo de las medidas de tendencia central, Media (\bar{x}), Mediana (Me) y Moda (Mo).
4. Calcula los cuantiles: Cuartiles (Q_3), Decil (D_7) y Percentil (P_{30})
5. Realiza la gráfica de: Ojivas, Circular, Histograma, Polígono de frecuencias



Ejercicios Adicionales

Como reforzamiento de los temas vistos, realiza los siguientes ejercicios:

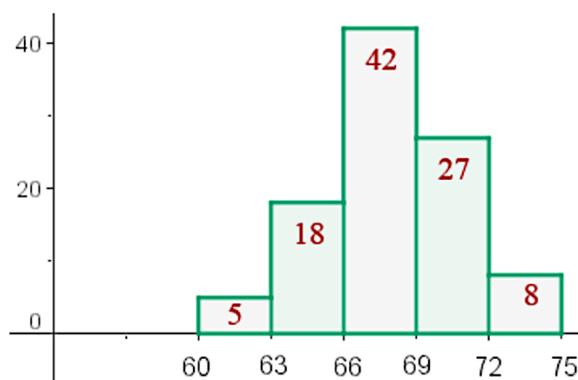
I. Resuelve los siguientes problemas de Cuantiles para **Datos No Agrupados**.

1. Treinta fallas de energía eléctrica duraron 23, 130, 49, 100, 36, 31, 85, 54, 123, 67, 44, 38, 93, 17, 97, 75, 42, 81, 62, 128, 19, 39, 96, 26, 80, 53, 85, 77, 29 y 86 minutos. Determina:
 - a) Los cuantiles Q_1 , Q_2 y Q_3
 - b) Los deciles D_1 , D_3 , D_5 , D_7 y D_9
 - c) Los percentiles P_5 , P_{15} , P_{45} , P_{65} , P_{85} y P_{95}

2. Quince traductores de inglés-español lograron traducir 92, 107, 123, 90, 78, 81, 76, 94, 105, 88, 109, 121, 95, 101 y 89 páginas de un mismo libro de control de calidad en una hora. Determina:
 - a) Los cuantiles Q_1 y Q_3
 - b) Los deciles D_2 , D_4 , D_6 y D_8
 - c) Los percentiles P_{10} , P_{30} , P_{50} , P_{70} , P_{90} y P_{99}

II. Resuelve los siguientes problemas de Cuantiles para **Datos Agrupados**.

2. El histograma de la distribución correspondiente al peso de 100 alumnos de Bachillerato es el siguiente:



- a) A partir de la gráfica anterior, construye la tabla de frecuencias.
- b) ¿A partir de que valores se encuentran el 25% de los alumnos más pesados?



Intervalos (pesos)	Frecuencias (estudiantes)	Marca de clase

2. A partir de los datos de la siguiente tabla de distribución de frecuencias registra las puntuaciones de una prueba de coordinación física dadas a 50 conductores de vehículos que habían consumido alcohol.

INTERVALO (puntuaciones)	FRECUENCIA f (conductores)	MARCA DE CLASE X
50 - 59	8	
60 - 69	18	
70 - 79	12	
80 - 89	7	
90 - 99	5	
	$N = 50$	

Construye:

- El histograma porcentual indicando el valor de los cuantiles: Q_3 , D_7 y P_{85}
- El polígono de frecuencias porcentual indicando el valor de los cuantiles: Q_1 , D_5 y P_{70}



Bloque 3 | Medidas de dispersión

3.1 Rango



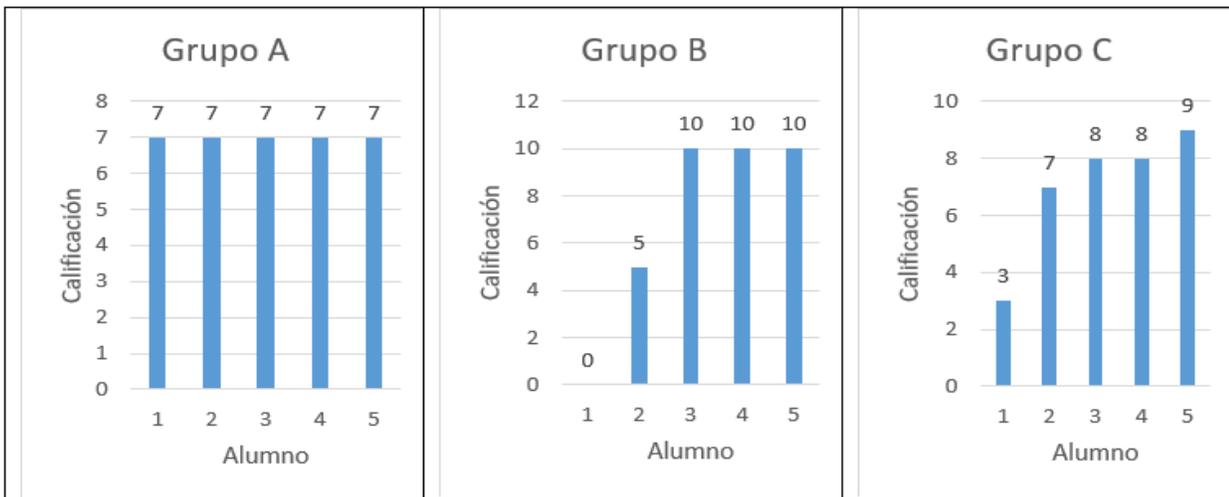
Introducción



¿Por qué estudiar la dispersión?

Las medidas de tendencia central, como la media o la mediana, buscan resumir con un solo número, un conjunto de valores. Desde este punto de vista resultan valiosas, pero no dicen nada sobre la dispersión de los datos, es decir, no describen en qué medida difieren entre sí los valores.

Veamos este ejemplo: Se analizan las calificaciones de los estudiantes de tres grupos en un examen de Probabilidad:



Analiza las gráficas anteriores y contesta lo siguiente:

1. ¿Qué similitudes y diferencias observas entre las gráficas?
2. ¿Cuál gráfica presenta mayor dispersión de los datos?, ¿cuál menor dispersión de los datos?, ¿por qué?
3. ¿Existe alguna relación entre la dispersión de los datos (mayor o menor) y la forma de la gráfica? Argumenta tu respuesta.
4. Para comparar los tres grupos, ¿qué medida de tendencia central recomendarías usar?



5. Con base en la información proporcionada, ¿puedes decir cuál de los grupos logró un mejor aprendizaje? Justifica tu respuesta.

Rango

Supongamos que un guía de turismo puede mencionar que una laguna tiene en promedio 1.2 metros de profundidad. Supongamos que usted no sabe nadar, ¿desearía cruzarla sin solicitar mayor información? Quizá no. Probablemente se preguntaría ¿cuántos metros es su máxima profundidad? ¿Cuántos metros es su mínima profundidad?

Si mide 1.4 metros de máxima profundidad y 1.0 metros de mínima profundidad ¿La cruzaría?

Si mide 1.9 metros de máxima profundidad y 0.5 metros de mínima profundidad ¿La cruzaría?

Cuando los datos se encuentran poco dispersos, es decir, acumulados alrededor de la media aritmética, este valor se considera representativa de los datos. Por el contrario, una medida grande de dispersión indica que la media no es confiable.

El *rango o recorrido* es un valor numérico que indica la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de una población o muestra estadística. Suele ser utilizado para obtener la dispersión total. Es decir, si tenemos una muestra con dos observaciones: 10 y 100 pesos, el rango será de 90 pesos.

Sobre todo, en finanzas, el rango es muy útil para observar cuán grande podría llegar a ser una variación o cambio. Vale la pena mencionar también que, en no pocas ocasiones, el rango no es una medida fija. Por ejemplo, imaginemos que el crecimiento del Producto Interno Bruto (PIB) de un país, ha estado entre el 3 y el 5% durante los últimos 20 años. El rango para estos datos, será del 2% pero esto no quiere decir que siempre vaya a ser ese. De modo que si en el año 21, el crecimiento es del 1%, el rango de los últimos 21 años, pasará del 2% al 6%.

La fórmula que se emplea es:

$$R = x_M - x_m$$

Dónde:

R = Rango o Recorrido

x_M = Dato mayor de la muestra

x_m = Dato menor de la muestra





Actividades de Apertura

En binas calcular la media aritmética y la diferencia entre la calificación mayor y la menor de cada muestra de grupos en Probabilidad y Estadística:

- Grupo A 6, 3, 10, 2 y 9
- Grupo B 6, 6, 6, 6 y 6
- Grupo C 6, 4, 6, 8 y 6
- Grupo D 4, 8, 4, 8 y 6

Grupo	Media	Rango
A		
B		
C		
D		



Actividades de Desarrollo

Contestar las siguientes preguntas:

¿Qué grupo presenta mayor rango en sus calificaciones? _____

¿Qué grupo presenta menor rango en sus calificaciones? _____

Observa los datos de los grupos C y D. ¿Cuál de ellos presenta mayor variabilidad? _____

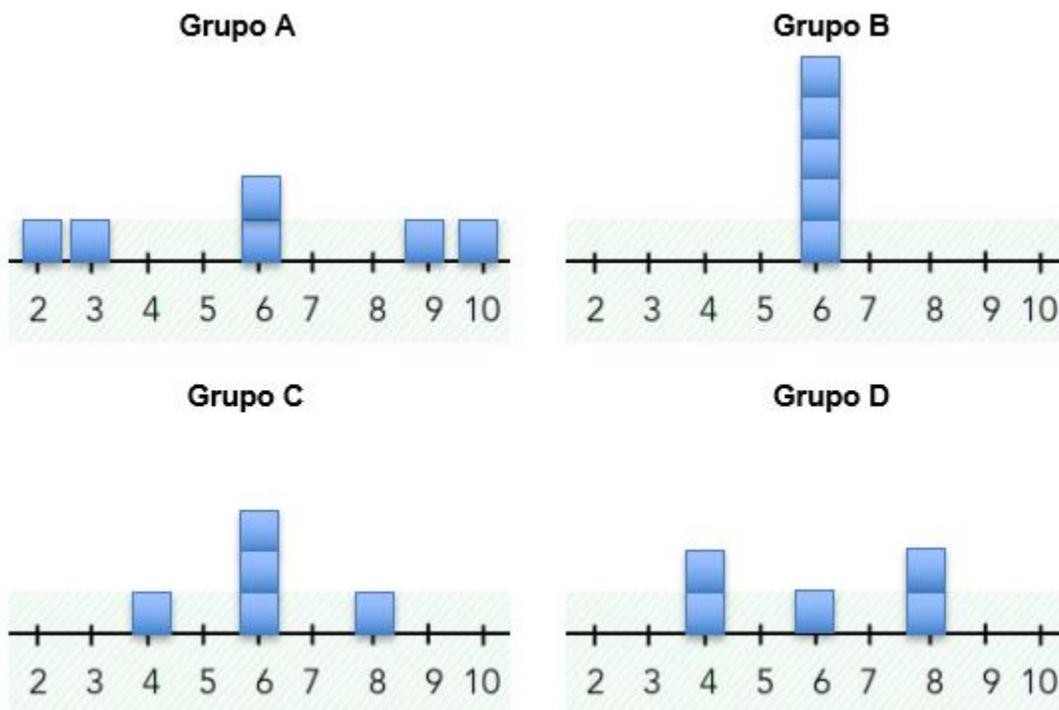
Sin embargo, tienen el mismo rango ¿verdad?



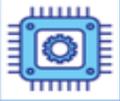
Actividades de cierre

Imagina que las siguientes rectas numéricas con balanza en donde el número 6, que es la media aritmética es el punto de equilibrio. Coloca las calificaciones como si fueran bloques cuadrados sobre la recta. El grupo A es el ejemplo.

Imagina que las siguientes rectas numéricas con balanza en donde el número 6, que es la media aritmética es el punto de equilibrio. Coloca las calificaciones como si fueran bloques cuadrados sobre la recta. El grupo A es el ejemplo.



Anota y discute tus observaciones con el resto del grupo.



Actividades de contexto o Transversales

A 5 compañeros de tu grupo hazles las siguientes preguntas y anota en el cuadro las respuestas.

Compañeros	Estatura en cm	Tiempo que tarda en llegar de su casa a la escuela en min.	Número de miembros que habitan en su casa	Edad en años
1				
2				
3				
4				
5				
Rango				

Con los datos y el resultado de los rangos obtenidos, discutan en el grupo sus observaciones y escriban sus conclusiones.



Ejercicios Adicionales

- Los siguientes datos son los clientes diarios de la florería “El Tulipán Negro”: 34, 45, 23, 34, 26, 32, 31, 41. Calcular el Rango.
- Los miembros de una cooperativa de viviendas tienen las siguientes edades:

42 60 60 38 60 63 21 66 56 57 51 57 44 45 35
 30 35 47 53 49 50 49 38 45 28 41 47 42 53 32
 54 38 40 63 48 33 35 61 47 41 55 53 27 20 21
 42 21 39 39 34 45 39 28 54 33 35 43 48 48 27
 53 30 29 53 38 52 54 27 27 43 28 63 41 23 58
 56 59 60 40 24

¿Cuál es la diferencia de edades entre el mayor y el menor de los miembros de la cooperativa? Use la fórmula de Rango.

3.2 Desviación media



Introducción



Esta medida de dispersión nos representa la diferencia absoluta promedio que existe entre cada dato que se encuentra en la muestra y la media de los datos y se determina de la siguiente manera:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Dónde:

x_i = dato i (o primer dato)

\bar{x} = media aritmética de la muestra

n = número de datos en la muestra

La interpretación de los resultados se interpreta como el grado de *alejamiento absoluto promedio* de los datos con respecto a su media.



¿Por qué sacar el valor absoluto de las diferencias entre cada dato y la Media Aritmética? Si solo se hicieran diferencias entre cada dato y la media aritmética, éstas tendrían signos positivos y negativos ya que algunos datos son menores que la media y otros son mayores que la media, luego al sumar las diferencias, con sus signos correspondientes, éstas se irían anulando unas con otras, dando como resultado cero y no sería posible medir el grado de alejamiento promedio de los datos en la muestra.



Actividades de Apertura

Considerando las calificaciones de Probabilidad y Estadística de los alumnos de los grupos del ejemplo anterior. Calcular, en cada caso, las sumas de las desviaciones. Recuerde que todos los grupos tienen media 6. El grupo A es el ejemplo:

Para el grupo A: $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x}) = (6 - 6) + (3 - 6) + (10 - 6) + (2 - 6) + (9 - 6) =$

Para el grupo B:

Para el grupo C:

Para el grupo D:



Actividades de Desarrollo

Como se puede observar en las actividades de apertura, la suma de las desviaciones siempre es cero. Esto se debe a que, como la media es el valor central, la suma de las diferencias positivas es el inverso aditivo de la suma de las diferencias negativas (si esto no pasara, la balanza no se equilibrara).

1. Ahora, usando el valor absoluto de las desviaciones, calcula la Desviación Media de cada grupo:

Para el grupo A: $DM = \frac{\sum_{i=1}^5 |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{|6-6|+|3-6|+|10-6|+|2-6|+|9-6|}{5} =$

Para el grupo B:

Para el grupo C:

Para el grupo D:





¿Qué podrías poner como observaciones? _____

2. Pregunta a 5 de tus compañeros la calificación que obtuvieron en el primer parcial de Probabilidad y estadística y anótalas en la siguiente tabla y complétala:

Compañero	Calificación	Media \bar{x}	$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})$	$DM = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i - \bar{x} }{n}$
1				
2				
3				
4				
5				



Actividades de cierre

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Puede servir la Desviación Media para medir la variabilidad total de un conjunto de datos?

2. ¿Por qué? _____



3.3 Varianza y desviación típica o estándar



Introducción



La varianza es una medida de dispersión que representa la variabilidad de una serie de datos respecto a su media. Formalmente se calcula como la suma de las diferencias al cuadrado divididos entre el total de observaciones.

¿Por qué se elevan al cuadrado los residuos?

La razón por la que las diferencias se elevan al cuadrado es sencilla. Si no se elevasen al cuadrado, la suma de diferencias sería cero. Así pues, para evitarlo, tal como ocurre con la desviación típica se elevan al cuadrado. El resultado de la varianza puede reflejar datos absurdos como litros cuadrados, pesos cuadrados, etc. Para que tenga sentido la interpretación calcularíamos la desviación típica que es la raíz cuadrada de la varianza.

La desviación típica o estándar se hace para poder trabajar en las unidades de medida iniciales. Claro que, como es normal, uno puede preguntarse, ¿de qué sirve tener como concepto la varianza? Bien, aunque la interpretación del valor que arroja no nos da demasiada información, su cálculo es necesario para obtener el valor de otros parámetros.

Para calcular la covarianza, que la veremos en temas posteriores, necesitamos la varianza y no la desviación típica, para calcular algunas matrices econométricas se utiliza la varianza y no la desviación típica. Es una cuestión de comodidad a la hora de trabajar con los datos, según lo que deseemos calcular. En lo general, la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza.

También se puede calcular como la desviación estándar o típica al cuadrado. Se usan las siguientes fórmulas:

3.3.1 Varianza

Varianza, para datos NO agrupados

Para una muestra:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Para una población:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (m_i - \mu)^2}{N}$$





Dónde:

x_i = es el dato i en la posición i

\bar{x} = media aritmética de la muestra

μ = media aritmética de la población

n = número de datos de la muestra

N = número de datos de la población

Varianza, para datos agrupados

Para una muestra:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (m_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Para una población:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i (m_i - \mu)^2}{N}$$

3.3.2 Desviación típica o estándar

Desviación típica o estándar muestral

$$s = \sqrt{s^2}$$

Desviación típica o estándar poblacional

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$



Actividades de Apertura

José, un joven egresado de la universidad, desea realizar un viaje a una ciudad que se encuentre fuera de su país. Ha investigado los costos por noche que implican rentar un cuarto de hotel en tres ciudades diferentes. Al realizar su búsqueda por internet encontró lo siguiente:

Venecia, Italia. Precio promedio por habitación = 1,865

Nueva York, USA. Precio promedio por habitación = 3,011

Rio de Janeiro, Brasil. Precio promedio por habitación = 797

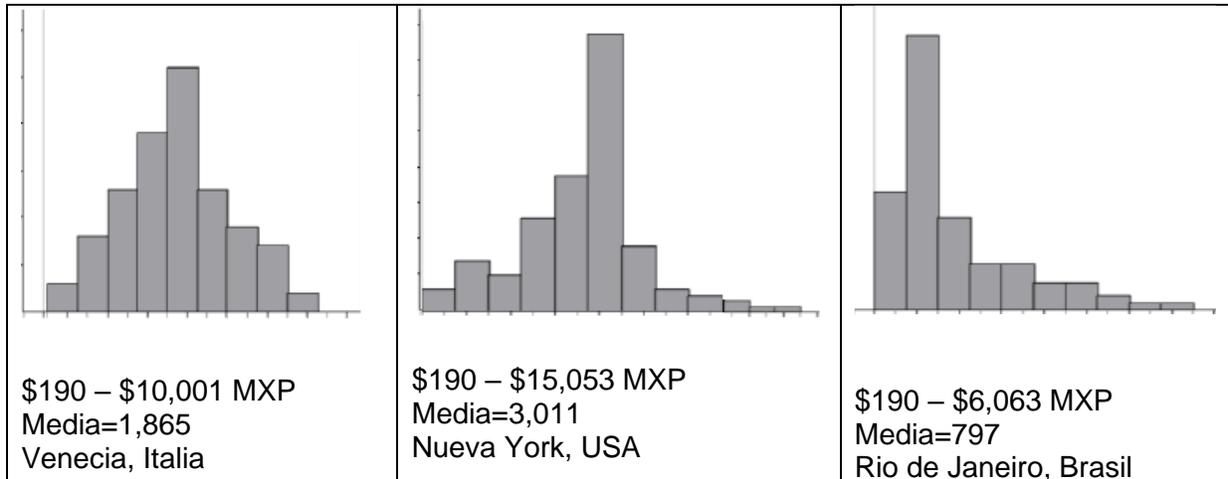
Al conocer estos datos, el joven se decepcionó al pensar que no podría viajar a Nueva York o Venecia dado el elevado costo del hospedaje por noche; en particular al conocer el costo promedio en cada ciudad, pensó casi de inmediato:

“si el costo promedio por noche es de \$3,011 en Nueva York, no tiene caso buscar más opciones de alojamiento en esa ciudad, pues de seguro que todos los cuartos tendrán un costo igual o similar”.



a) ¿Estás de acuerdo con el razonamiento de José?, ¿consideras que debería abandonar su búsqueda por la (supuesta) falta de opciones de alojamientos que sean más económicos?, ¿por qué?

Sintiéndose un poco más optimista, José buscó y revisó más información sobre los costos por noche en el mismo sitio de internet y encontró las siguientes gráficas:



b) ¿Cuál de las tres distribuciones de precios presenta menor variación?

c) ¿Cuál de las tres distribuciones de precios presenta mayor variación?



Actividades de Desarrollo

Supongamos que deseas abrir una cuenta de inversión a tasa variable en una institución financiera. El banco Beta ha ofrecido una tasa de rendimiento del 12, 10, 13, 9 y 11%, mientras que el banco Gama ha proporcionado una tasa del 13, 6, 14, 10 y 12% en los últimos cinco años. Con esta información ¿Cuál banco te ofrece una inversión más segura?

Calcula la varianza de la tasa de rendimiento de los dos bancos y compara los valores. ¿Cambió tu elección?

Calcula la desviación estándar. ¿Qué significa este valor?

Calcular la varianza y desviación estándar de las edades de una población de niños a partir de la siguiente tabla:

Edad (años) x_i	Frecuencia f_i
3	9
4	12
5	9



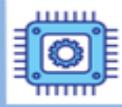
Actividades de cierre

Pregúntale a 10 de tus compañeros cuánto tiempo demoran en ayudar en las labores del hogar, recomiéndales usar un cronómetro para medir el tiempo.

Calcula la varianza _____ y la desviación estándar _____ del tiempo de recorrido.

Explica el significado de la varianza obtenida _____

Explica el significado de la desviación estándar obtenida.



Actividades de contexto o Transversales

1. Pregúntale a 10 de tus compañeros cuál es su estatura en metros, lleva una cinta métrica para obtener los datos. Analiza y explica los resultados a tus compañeros.

2. Los siguientes son los puntajes de un grupo de adolescentes en un test de Agudeza Visual: 25, 12, 15, 23, 24, 39, 13, 31, 19, 16. Calcular la varianza de estos datos y desviación estándar de los datos.



Ejercicios Adicionales

1. Dada la siguiente distribución de edades en años x , de niños que han padecido varicela.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Frecuencias	4	9	11	8	7	4	5	2	2	0	1

Calcular la desviación estándar.

2. El chef en jefe de cierto restaurante acaba de recibir dos docenas de tomates de su proveedor, pero todavía no los acepta. Sabe por la factura que el peso promedio de un tomate es de 7.5 onzas, pero insiste en que todos tengan un peso uniforme. Aceptará los tomates solo si el peso promedio es de 7.5 onzas y la desviación estándar es menor que 0.5 onzas. Los pesos de los tomates son los siguientes:

6.3	7.2	7.3	8.1	7.8	6.8	7.5	7.8	7.2	7.5	8.1	8.2
8.0	7.4	7.6	7.7	7.4	7.5	8.4	7.4	7.6	7.4	6.2	7.4

¿Cuál es la decisión del chef?

3. Los niños, a diferencia de los adultos, tienden a recordar las películas, cuentos e historias como una sucesión de acciones más que el argumento en forma global y de conjunto. En el relato de una película, por ejemplo, utilizan con frecuencia las palabras "y entonces...". Una psicóloga con suprema paciencia pidió a 25 niños que le contaran una determinada película que ellos habían visto. Consideró la variable: cantidad de "y entonces..." utilizados en el relato y registró los siguientes datos: 15, 19, 17, 18, 17, 16, 16, 21, 23, 20, 20, 15, 17, 20, 22, 17, 19, 20, 18, 11, 31, 17, 19, 18, 40.

Como parte del mismo estudio la experimentadora obtuvo de 25 adultos el mismo tipo de datos. Estos fueron: 10, 5, 13, 10, 8, 7, 9, 7, 9, 10, 3, 11, 14, 8, 12, 5, 10, 9, 7, 11, 14, 10, 15, 9, 4.

Calcular la varianza e indique en cuál grupo los integrantes son más parecidos en cuanto a la cantidad de "y entonces..." utilizados en el relato de una película. Justificar la respuesta.

Varianza del grupo de niños = _____ **Varianza del grupo de adultos = _____**



4. Varianza y desviación estándar para datos agrupados. Completando la siguiente tabla, calcular:

- a) La desviación media.
- b) La varianza.
- c) La desviación típica o estándar.

Intervalos	Frecuencia absoluta f_i	Marca de clase X_i	$X_i \cdot f_i$	Distancia $ X_i - \bar{X} $	$(X_i - \bar{X})^2$
[5.0 - 5.5)	1				
[5.5 - 6.0)	2				
[6.0 - 6.5)	3				
[6.5 - 7.0)	4				
[7.0 - 7.5)	8				
[7.5 - 8.0)	1				
[8.0 - 8.5)	5				
Total					



Bloque 4 | Medidas de forma

4.1 Sesgo



Introducción



Las medidas de forma son indicadores que ofrecen información acerca de la manera en que los datos se encuentran contenidos dentro de una distribución; se clasifican en dos grupos: las medidas de sesgo o asimetría y las medidas de apuntamiento o curtosis.



Actividades de Desarrollo

El sesgo es una medida que indica qué tan simétrica o asimétrica es una distribución, se clasifican en:

Distribución simétrica Se llama así, si los datos que tiene se encuentran repartidos de forma semejante en ambos lados de la media, por lo que en una distribución simétrica la moda, la mediana y la media son iguales.

Distribución asimétrica Se llama así, si tiene los datos con las frecuencias más bajas ubicadas del lado derecho o izquierdo de la media.

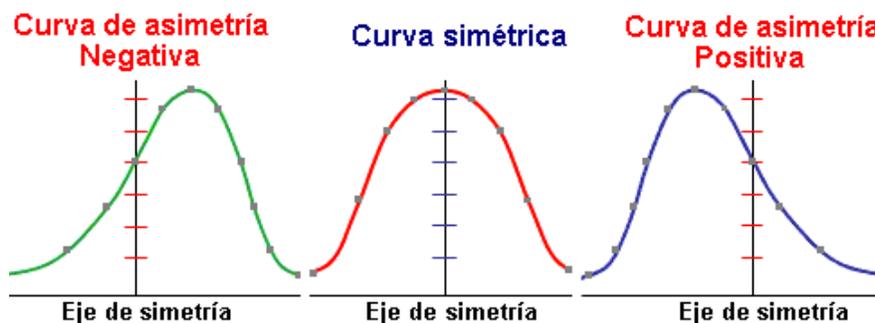
Existen dos tipos de asimetrías

La asimetría a la izquierda También llamada asimetría negativa, que es aquella en la que los datos con las frecuencias más bajas se ubican a la izquierda de la media y los datos con mayor frecuencia se encuentran a la derecha.

En la asimetría negativa la Media es menor que la Mediana y la Mediana es menor que la Moda.

La asimetría a la derecha También llamada asimetría positiva, y es aquella en la que los datos con las frecuencias más bajas se ubican a la derecha de la media y los datos con mayor frecuencia se encuentran a la izquierda.

En la asimetría positiva la Moda es menor que la Mediana y la Mediana es menor que la Media.



Analiza el siguiente vídeo.

<https://www.youtube.com/watch?v=88lpvX0YEso>



El coeficiente de Fisher es una herramienta que sirve para determinar la simetría o la asimetría de una distribución.

Su fórmula es

$$S_f = \frac{\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^3}{S^3}$$

N = Número total de datos.

\bar{X} = La media aritmética

S = Desviación estándar

El coeficiente de Fisher cumple con las siguientes características.

Si $S_f = 0$ significa que la distribución es simétrica

Si $S_f > 0$ significa que la distribución tiene sesgo positivo

Si $S_f < 0$ significa que la distribución tiene sesgo negativo

4.2 Apuntamiento o curtosis

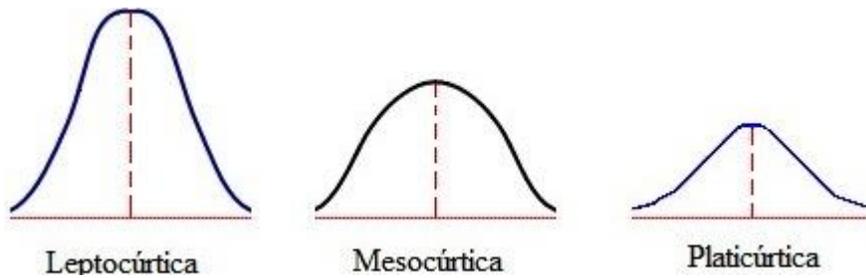
El apuntamiento o curtosis mide que tan achatada o tan puntiaguda es una distribución.

De acuerdo con este análisis, las distribuciones se clasifican en tres tipos

Distribución leptocúrtica	Es una distribución que contiene una gran concentración de datos en la zona central.
Distribución mesocúrtica	Es una distribución que contiene una concentración de datos mediana en la zona central.
Distribución platocúrtica	Es una distribución que contiene una baja conglomeración de datos en su región central.



Las siguientes imágenes pueden ayudarte a visualizar los conceptos anteriores.



Actividades de cierre

Contesta las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué son las medidas de forma?
2. ¿Qué es sesgo?
3. ¿Qué es una distribución simétrica?
4. Escribe la diferencia que existe entre asimetría positiva y asimetría negativa.
5. Anota ¿qué es el coeficiente de Fisher?
6. De acuerdo con el valor que tiene el coeficiente de Fisher, ¿cómo se clasifican las distribuciones?
7. ¿Qué es apuntamiento o curtosis?
8. ¿Qué es distribución leptocúrtica?
9. ¿Qué es distribución mesocúrtica?
10. ¿Qué es distribución platicúrtica?



Bloque 5 | Medidas de correlación

5.1 Coeficiente de correlación



Introducción



Hasta este momento se han abordado los cálculos de diferentes medidas que nos describen un comportamiento general, su distribución y sus tendencias de una variable. Las medidas de correlación permiten relacionar diversas variables y determinar si tienen o no dependencia alguna entre ellas.



Actividades de Apertura



Revisa la siguiente lección: "Introducción a la Correlación",
https://www.youtube.com/watch?v=KNf5soJ4_yk



Actividades de Desarrollo

En el departamento de orientación educativa se están organizando conferencias para orientar a los estudiantes en la elección de su carrera a elegir, se buscará la mejor orientación basados en sus calificaciones que determinan sus actitudes y capacidades. Para facilitar la obtención de información al estudiante, se analizarán correlaciones entre sus calificaciones de dos de sus materias, por ejemplo, para el área de físico-matemáticas, se tomarían de Álgebra, Geometría, Cálculo, Física o Química.



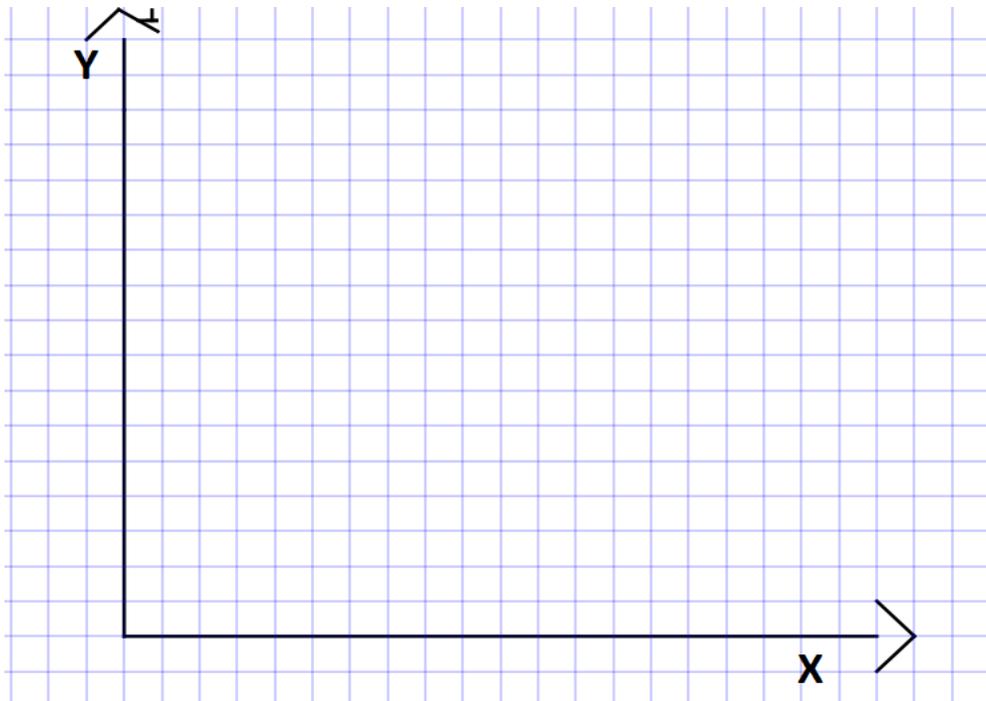


Tomemos los siguientes datos de 10 alumnos para ver la relación de sus materias:

Alumno	Cálculo Integral	Física
Alumno 1	48	56
Alumno 2	53	77
Alumno 3	77	82
Alumno 4	44	67
Alumno 5	69	85
Alumno 6	79	86
Alumno 7	84	93
Alumno 8	68	76
Alumno 9	61	58
Alumno 10	55	45

De la tabla de calificaciones, contesta y desarrolla lo que se te pide a continuación:

- a) Graficar esta información, usando como abscisas las calificaciones de Cálculo integral y como ordenadas las calificaciones de Física, donde cada punto (x,y) , será registrado como la calificación por alumno.



- b) Si observas los puntos del gráfico anterior, ¿qué tendencia muestra el conjunto?

Para conocer o dar una respuesta certeza a la pregunta del inciso b), calculemos el coeficiente de correlación "r":



$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

Tomemos Cálculo Integral como la variable X y Física como la variable Y. Completamos la tabla con la información que necesitamos:

Cálculo X	Física Y	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
48	56	-15.8	-15.2	240.16	249.64	231.04
53	64	-10.8	-7.2	77.76	116.64	51.84
77	82	13.2	10.8	142.56	174.24	116.64
44	67	-19.8	-4.2	83.16	392.04	17.64
69	85	5.2	13.8	71.76	27.04	190.44
79	86	15.2	14.8	224.96	231.04	219.04
84	93	20.2	21.8	440.36	408.04	475.24
68	76	4.2	4.8	20.16	17.64	23.04
61	58	-2.8	-13.2	36.96	7.84	174.24
55	45	-8.8	-26.2	230.56	77.44	686.44
638	712	Sumas		1568.4	1701.6	2185.6
63.8	71.2					

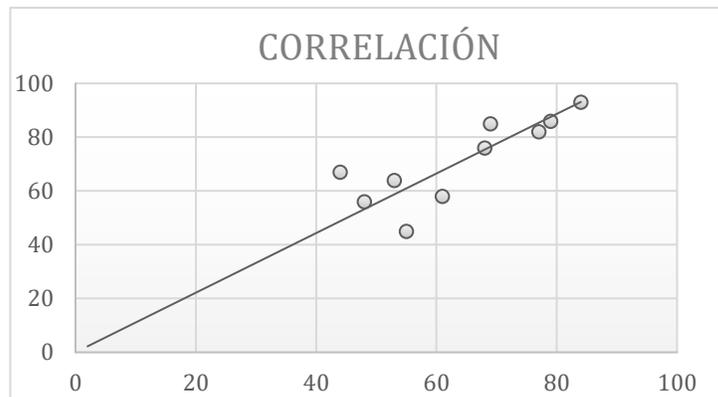
$$r = \frac{1568.4}{\sqrt{1701.6} \cdot \sqrt{2185.6}} = \frac{1568.4}{(41.2504545)(46.7504011)} = \mathbf{0.8133}$$

Como podemos observar “r” tiene un valor positivo, quiere decir que las variables tienen una dependencia positiva, es decir, que entre más alta calificación tenga en matemáticas, también subirá la de física. Estos alumnos si son unos buenos candidatos al área de Físico-matemáticas.





Esta es la gráfica correspondiente:



También puedes realizar el ejercicio usando una hoja de Excel, para ello:



Revisa la siguiente lección: " Coeficiente de Correlación",

https://www.youtube.com/watch?v=cRv_Ff315J4&t=15s



Actividades de cierre

Realiza el siguiente ejercicio para ver si existe relación entre las materias de Cálculo Diferencial e inglés.

Alumno	Cálculo Diferencial	Inglés
Alumno 1	44	100
Alumno 2	53	94
Alumno 3	66	90
Alumno 4	69	83
Alumno 5	73	80
Alumno 6	79	78
Alumno 7	81	74
Alumno 8	84	70
Alumno 9	89	68
Alumno 10	95	63



Ejercicios Adicionales

Ejercicio 1: Se midió el peso de 12 personas (x), y la extensión de su cintura (y). Se obtuvieron los siguientes datos.



Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	80	75	90	95	70	65	85	83	78	68	73	92
y	100	90	100	110	90	95	120	120	115	90	99	105

Determina si existe una correlación lineal entre ambas mediciones

Peso X	Cintura Y	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
80	100					
75	90					
90	100					
95	110					
70	90					
65	95					
85	120					
83	120					
78	115					
68	90					
73	99					
92	105					

$r = \text{-----} = \text{-----} =$



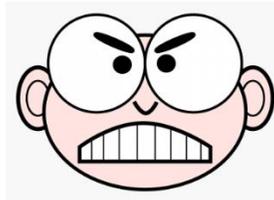
Gráfica

Calcula el coeficiente de correlación o relación que existen entre el peso y la medida de la cintura.

Coeficiente de correlación = _____

Argumentación: _____

Ejercicio 2: Se registraron en la tabla siguiente la edad (en años) y la conducta agresiva (medida en una escala de cero a 10) de 10 niños.



Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Edad x	6	6	6.7	7	7.4	7.9	8	8.2	8.5	8.9
Conducta y	9	6	7	8	7	4	2	3	2	1



Edad X	Conducta Y	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
6	9					
6	6					
6.7	7					
7	8					
7.4	7					
7.9	4					
8	2					
8.2	3					
8.5	2					
8.9	1					

Existe relación alguna entre la edad y la conducta agresiva de los niños.

$$r = \text{_____} = \text{_____} =$$

Gráfica

Coefficiente de correlación = _____

Argumentación: _____



5.2 Recta de regresión



Introducción

La recta de regresión intenta sustituir a todo un conjunto de puntos de un diagrama de dispersión y facilitar los cálculos necesarios para determinar la tendencia que presentan las dos variables de interés. No siempre se puede trazar dicha recta de regresión para determinar la tendencia. Esta recta también nos sirve para extrapolar y conocer datos de que no se encuentran en la tabla de información.



Actividades de Apertura



Revisa la siguiente lección: “Recta de Regresión Lineal”,
<https://www.youtube.com/watch?v=9U-cCKW-gDA&t=12s>



Actividades de Desarrollo

Es hora de calcular la recta de regresión lineal de un conjunto de datos.
 Sea la ecuación de la recta:

$$y = bx + a + \epsilon$$

Donde:

b = Es la pendiente de la recta, este valor debe estimarse a partir de la tendencia de los puntos

a = Es la ordenada al origen, es decir, el punto en que la recta cruza el eje Y

y = Es la variable dependiente

x = Es la variable independiente

ϵ es el error

$$b = \frac{COV_{xy}}{S_x} \quad \text{donde } S_x \text{ es la Varianza de } x$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad \text{donde } \bar{y} \text{ es la media de la variable } y, \bar{x} \text{ es la media de la variable } x$$

Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cálculo (x)	48	53	77	44	69	79	84	68	61	55
Física (y)	56	64	82	67	85	86	93	76	58	45



$$COV_{xy} = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1} \quad S_x = \frac{\sum_1^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Ahora tomemos los datos de la tabla

Cálculo X	Física Y	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
48	56	-15.8	-15.2	240.16	249.64	231.04
53	64	-10.8	-7.2	77.76	116.64	51.84
77	82	13.2	10.8	142.56	174.24	116.64
44	67	-19.8	-4.2	83.16	392.04	17.64
69	85	5.2	13.8	71.76	27.04	190.44
79	86	15.2	14.8	224.96	231.04	219.04
84	93	20.2	21.8	440.36	408.04	475.24
68	76	4.2	4.8	20.16	17.64	23.04
61	58	-2.8	-13.2	36.96	7.84	174.24
55	45	-8.8	-26.2	230.56	77.44	686.44
638	712	Sumas		1568.4	1701.6	2185.6
63.8	71.2					

Vamos a sustituir los valores:

$$COV_{xy} = \frac{1568.4}{9} = 174.266667$$

$$S_x = \frac{1701.6}{9} = 189.066667$$

$$b = \frac{174.267}{189.067} = 0.92172073$$

$$a = 71.2 - (0.9217207)(63.8) = 12.394217$$

Entonces obtenemos la ecuación de la recta:

$$y = 0.9217x + 12.3942 + \epsilon$$



Actividades de cierre

Encuentra la ecuación de la Recta Lineal del ejercicio anterior.

Alumno	Cálculo Diferencial	Inglés
Alumno 1	44	100
Alumno 2	53	94
Alumno 3	66	90
Alumno 4	69	83
Alumno 5	73	80
Alumno 6	79	78
Alumno 7	81	74
Alumno 8	84	70
Alumno 9	89	68
Alumno 10	95	63



Ejercicios Adicionales

- Rescata el ejercicio de la actividad de cierre del tema de Coeficiente de correlación referente a los pesos y medidas de cintura para calcular la ecuación de la recta de regresión correspondiente.

Peso X	Cintura Y	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
80	100					
75	90					
90	100					
95	110					
70	90					
65	95					
85	120					
83	120					
78	115					
68	90					
73	99					
92	105					



$$COV_{XY} =$$

$$S_x =$$

$$b =$$

$$a =$$

Por tanto, la recta queda de la siguiente forma:

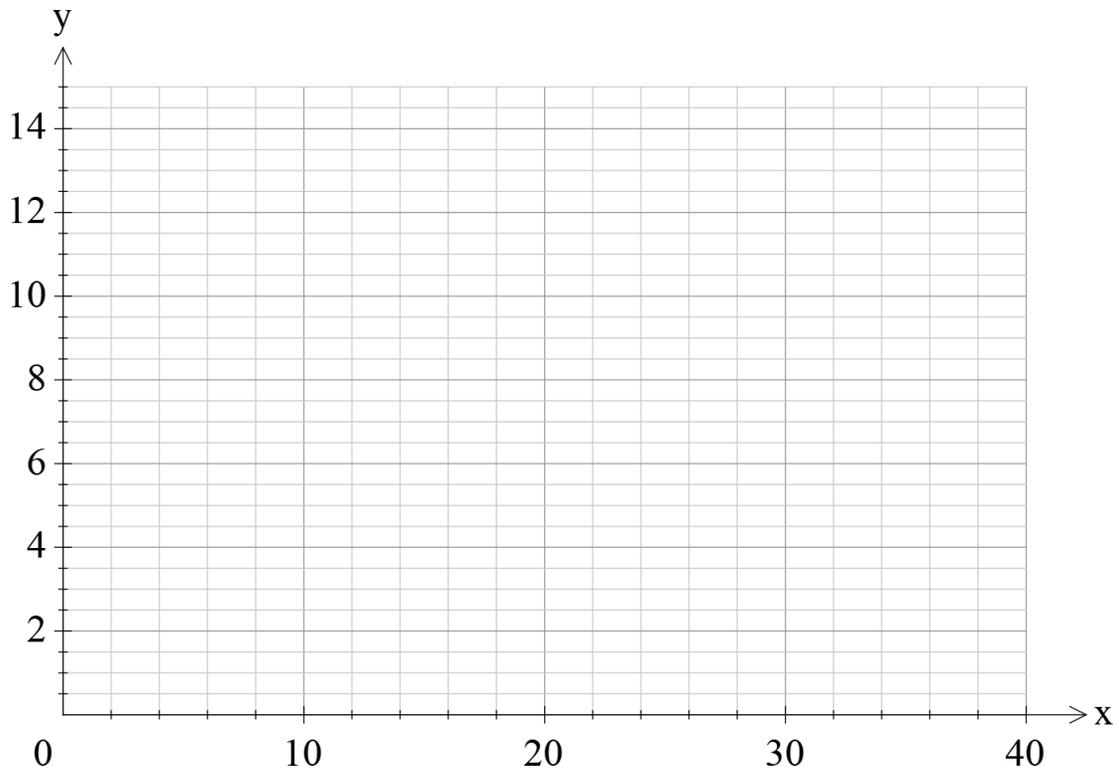
$$y =$$

2. Un centro comercial sabe que, en función de la distancia, en kilómetros, a la que se sitúe de un núcleo de población, acuden los clientes, en cientos (por día), que figuran en la tabla:

Caso	Nº de Clientes (en cientos) y	Distancia (en Km) x	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	8	15					
2	7	19					
3	6	25					
4	4	3					
5	2	34					
6	1	40					
Sumas							
Medidas							



a) Construye el grafico de dispersión de las variables y grafica la recta de regresión



Cálculo de los Coeficientes de Regresión:

a=

b=



Ecuación de la Recta de regresión:

Estima el número de clientes que debe esperarse si el Centro Comercial se construye a 2 km de la población:

Calcula el Coeficiente de Correlación:

¿Qué interpretación se da al valor coeficiente de correlación?:



5.3 Error estándar de estimación



Introducción



El error de estimación nos mide el grado de alejamiento de existe entre cada punto del diagrama de dispersión y la recta de regresión. Debido a que la recta no pasa por cada uno, si así sucediera no sería entonces una recta, se dice entonces que se comete un error al definir la Recta de Regresión Lineal.



Actividades de Apertura



Revisa la siguiente lección: “Error Estándar”,
<https://www.youtube.com/watch?v=LWbVyDzmlaA&t=11s>



Actividades de Desarrollo

Siguiendo con el ejercicio inicial, definamos el error mediante la siguiente ecuación:

Recordemos que:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_1^n (y_i - \bar{y})^2}{N - 2}}$$

Lo tomamos de la primera tabla donde hicimos los cálculos

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2185.6}{10-2}} = 16.53$$

El error se obtiene del cálculo de una raíz por tanto su valor es “+” “-”

Así nos quedaría la ecuación de la Recta de regresión lineal:

$$y = 0.9217x + 12.3942 \pm 16.529$$



Actividades de cierre

Calcula la estimación del error del ejercicio de la recta de regresión lineal que encontraste en la Actividades de **cierre del punto 5.2**.



Ejercicios Adicionales

Ejercicio 1: Se midió el peso de 12 personas (x), y la extensión de su cintura (y). Se obtuvieron los siguientes datos.



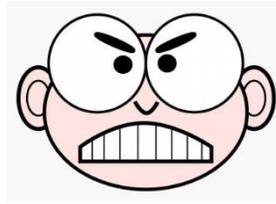
Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	80	75	90	95	70	65	85	83	78	68	73	92
y	100	90	100	110	90	95	120	120	115	90	99	105

Calcula el error de la estimación de la recta de Regresión Lineal que se aproxima a este conjunto de datos.

Error = _____



Ejercicio 2: Se registraron en la tabla siguiente la edad (en años) y la conducta agresiva (medida en una escala de cero a 10) de 10 niños.



Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Edad x	6	6	6.7	7	7.4	7.9	8	8.2	8.5	8.9
Conducta y	9	6	7	8	7	4	2	3	2	1

Calcula el error de la estimación de la recta de Regresión Lineal que se aproxima a la relación entre la edad y la conducta de los niños.

Error = _____

Ejercicio 3: Calcula el error estándar de estimación del ejercicio 2 de la página 113.



Bloque 6 | Teoría de conjuntos

6.1 Elementos básicos

6.1.1 Diagrama de Venn-Euler



Introducción



Te habrás dado cuenta de que los conjuntos también se pueden representar gráficamente mediante diagramas de Venn- Euler, que consisten en círculos que contienen en un interior los elementos del conjunto. En el estudio de conjuntos es necesario establecer uno de los conjuntos del cual proceden todos los conjuntos con los cuales se efectúan las operaciones. Por ejemplo, la mayoría de los conjuntos numéricos puede usarse como origen el conjunto de los números reales. Al conjunto que se considera como el origen de todos los conjuntos con los que estamos trabajando se le denomina conjunto universo y lo podemos representar con la letra “U” mayúscula, como ya se mencionó anteriormente. Este conjunto Universal será un rectángulo, que encierre todos los conjuntos representados por círculos, así podemos comprender que el complemento de un conjunto contiene todos los elementos de ese conjunto y que también pueden estar en el universo.



Actividades de Apertura

Analiza en tu casa las cosas que te rodean, podrás observar que están acomodadas de tal manera que sea fácil encontrarlas. Por ejemplo, en el refrigerador, encontrarás la fruta en un lado, en otro espacio encontrarás la leche o jugos, en otro espacio, la carne, etc.

De igual manera los diagramas de Venn- Euler nos sirven para acomodar los conjuntos y establecer relaciones que tienen entre ellos.

Dibuja en tu cuaderno el refrigerador de tu casa y como ordenarías lo que hay adentro.



Actividades de Desarrollo

Dado los siguientes conjuntos:

$$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$$

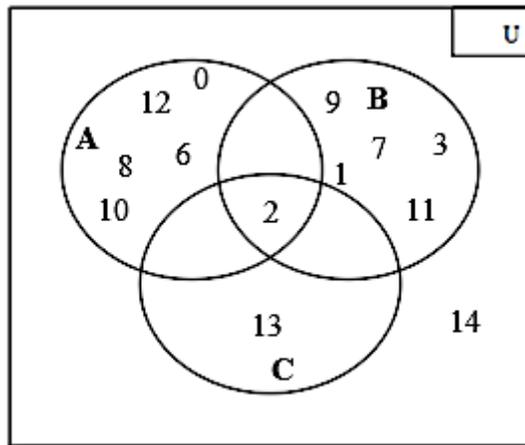
$$A = \{0,2,4,6,8,10,12\}$$

$$B = \{1,2,3,5,7,9,11\}$$

$$C = \{2,4,5,13\}$$



El diagrama de Venn- Euler del sistema formado con estos conjuntos es:



Actividades de cierre

1. Piensa en un diagrama de Venn- Euler que puedas realizar con los siguientes conjuntos y desarróllalo en tu libreta.

$$\begin{aligned}
 U &= \{-1, -2, -3, -4, -5, -6\} \\
 A &= \{-1, -2, -3\} \\
 B &= \{-1, -4, -6\} \\
 C &= \{-1, -3\}
 \end{aligned}$$

6.1.2 Conjunto



Introducción

Nuestro entorno está formado por conjuntos, por ejemplo; tu familia, escuela, casa, ropa, las estrellas, planetas, jugadores favoritos de algún deporte de nuestro gusto, etc., todos ellos son conjuntos. Dado que los conjuntos aparecen en todo nuestro entorno, es de vital importancia saber expresarlos y conocer los procedimientos para relacionar sus elementos con los de otros conjuntos.

En Matemáticas, los números y las cantidades son conjuntos; en Geometría o en Trigonometría las figuras geométricas también son conjuntos y tienen elementos en común, por ello es necesario conocer reglas, formas y operaciones que permitan trabajar con ellos y que sea posible usarlos en las aplicaciones cotidianas del ser humano.

Un conjunto es una colección de elementos organizados por alguna característica en común.



Es importante que el conjunto este definido sin ambigüedades, respecto a los elementos que forman parte de él.

Conjunto: "Clase de objetos definida apropiadamente"ii

Los conjuntos se definen con letras mayúsculas, a las cuales se asigna una expresión entre llaves y sus elementos se separan con comas. Como este es un tema muy amplio, tu facilitador te explicará las propiedades de los conjuntos y sus operaciones con más detalle.



Actividades de Apertura

Observa dentro de tu mochila, las cosas que guardas en ella se organizan de acuerdo a ciertas características, por ejemplo, en tu lapicera guardas, lápices, lapiceros, colores, sacapuntas, borrador y cosas que te servirán en clases, en otro espacio de tu mochila guardas tus libretas de las diversas materias, en otro espacio tus libros, etc.

Como verás existen conjuntos de cosas que guaramos ordenadamente considerando ciertas características en común.

Ahora observa el video y analízalo, esto permitirá entender el concepto básico sobre conjuntos.



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=PZN6jyw1Ngk>



Actividades de Desarrollo



Recordemos que los conjuntos se pueden definir por Comprensión o por Extensión.

Por extensión cuando enumeras cada uno de los elementos.

Ejemplo.

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Por comprensión cuando describes el conjunto por alguna característica en particular o en general.

Ejemplo:

$$A = \{x/x \in N, x < 7\}$$

Conjunto bien definido.

V es el conjunto de vocales $V = \{a, e, i, o, u\}$

Conjunto que no está bien definido.

$$M = \{10 \text{ mejores deportistas}\}$$

Este segundo ejemplo no está bien definido por qué no se puede determinar ¿En qué deporte o deportes? o ¿Quiénes son?



Rosita tiene un conjunto de frutas ella desea clasificar la fruta para colocarla dentro de su refrigerador, pretende colocarla según su estructura.

Observa el conjunto U =Universo de fruta que tiene Rosita para clasificar su fruta de la siguiente manera:

$$U = \{Melón, Sandía, mango, uvas, fresas, plátano, manzanas, peras, \}$$



Escribe en el conjunto A, las frutas de cáscara suave y en el conjunto B las frutas de cáscara dura.

Si no tienes el espacio suficiente escribe esta actividad de desarrollo en tu libreta de apuntes y en la libreta de ejercicios inventa otros ejemplos como este.

$$A = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$B = \{ \quad \quad \quad \}$$

Si Rosita quisiera agregar un conjunto donde indique frutas sin cáscara, cuales frutas escribiría dentro del conjunto C.

$$C = \{ \quad \quad \quad \}$$



Actividades de cierre

Pon a prueba tu ingenio y escribe por lo menos 10 conjuntos que observes a tu alrededor. Realízalo en tu libreta de apuntes.

Resuelve el siguiente ejercicio y escribe los siguientes conjuntos por extensión en tu libreta.

Conjunto P de planetas del sistema solar.

$$P = \{ \quad \quad \quad \}$$

Conjunto de números Naturales.

$$N = \{ \quad \quad \quad \}$$

Conjunto de números Enteros.

$$Z = \{ \quad \quad \quad \}$$

Conjunto de números pares menores que 10.

$$A = \{ \quad \quad \quad \}$$

Conjunto de números impares mayores que -7 y menores que 9.

$$B = \{ \quad \quad \quad \}$$

De que otra manera podría escribir este último ejemplo por comprensión.

$$B = \{ \quad \quad \quad \}$$



6.1.3 Subconjunto



Introducción

Cuando todos los elementos de un conjunto A son elementos contenidos en otro conjunto B, se dice que A es subconjunto de B. Esto se denota mediante la expresión $A \subset B$



Actividades de Apertura

Un subconjunto es una parte de un conjunto o bien que el subconjunto está incluido dentro de un conjunto más grande.

Si tu observas las cosas que tienen en la mochila, podrás observar que tienes varios subconjuntos dentro de la mochila, como ya habíamos analizado anteriormente. En una de las bolsas de tu mochila por ejemplo tienes otra bolsa donde tienes un subconjunto ejemplo monedero en el cual están incluidos todos los elementos de ese conjunto y ahí encontrarás tal vez monedas y billetes.

Observa el video y analiza.



https://www.youtube.com/watch?v=e31Th_hFB5c



Actividades de Desarrollo

Analicemos un ejemplo sobre subconjuntos.

Sean los conjuntos A y B

$$A = \{1,3,5,7,18\}$$

$$B = \{1,7,18\}$$

Donde podemos observar que:

$$B \subseteq A$$

B es subconjunto de A

La línea debajo del símbolo \subseteq , significa que B puede ser igual que A, estos pueden ser conjuntos idénticos. Si queremos decir que B es un subconjunto apropiado de A, esto quiere decir: es un subconjunto, pero hay por lo menos un elemento en A que no está en B, entonces debemos escribirlo correctamente eliminando la línea de abajo y quedará de la siguiente manera:

$$B \subset A$$

Entonces para otro ejemplo sería:

$$M = \{a, e, i, o, u\}$$

$$N = \{a, e, i, o, u\}$$

Y nos piden determinar que N es subconjunto de M, puedo expresarlo así:

$$N \subseteq M$$

Porque estaré indicando que N es un subconjunto de M pero que también es igual a M.



Actividades de cierre

Analiza los siguientes conjuntos indica quien es el subconjunto.



Sean los conjuntos F y G

$$F = \{\mathbf{Figuras\ geométricas}\}$$

$$G = \{\mathbf{Triángulos, cuadriláteros}\}$$

Sean los conjuntos J y F

$$J = \{\mathbf{Triángulos}\}$$

$$F = \{\mathbf{triángulos\ rectángulos, triángulos\ isosceles}\}$$

Escribe como representarías que F es subconjunto de J

Y represéntalo en un diagrama de Venn Euler.



Puedes desarrollar 5 ejercicios sobre este tema, puedes buscarlos en libros de tu biblioteca o bien virtuales que puedas encontrar.



6.1.4 Pertenencia



Introducción



Un elemento pertenece a un conjunto, cuando éste, está contenido dentro del conjunto de referencia.

El símbolo que se usa para indicar pertenencia es:

\in

Por el contrario, cuando un elemento no pertenece a un conjunto, quiere decir que ese elemento no está contenido en el conjunto de referencia.

Símbolo de no pertenece es:

\notin



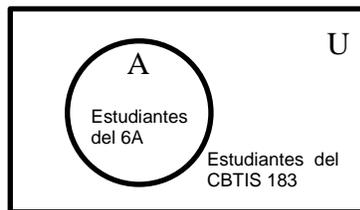
Actividades de Apertura

Supongamos que tu escuela la observamos como un conjunto Universo, el grupo en el que estás inscrito(a) pertenece a tu escuela, esto nos indica que tu grupo está incluido dentro de ese grupo Universo.

Ejemplo si tú eres un estudiante del 6° A del CBTIS 183, podríamos decir que el 6°A pertenece al CBTIS 183.

$$U = \{\text{estudiantes del CBTIS 183}\}$$

$$A = \{\text{estudiantes del 6A de la especialidad de electricidad}\}$$



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=C260x7UApNg>





Actividades de Desarrollo

Observa el siguiente conjunto A, e identifica que figura pertenece al conjunto y escribe el símbolo de pertenece o no pertenece según sea el caso.

A
 A
 A
 A
 A
 A

Este es otro ejemplo con números, escribe los símbolos de “pertenece” o “no pertenece”.

2 _____ M
 3 _____ M
 4 _____ M
 12 _____ M



Actividades de cierre

Dibuja en tu libreta un ejemplo parecido, puedes utilizar otros conjuntos de figuras, objetos, cosas, personas, etc.



6.1.5 Conjunto universo



Introducción

El conjunto universo, es aquel que contiene a todos los elementos de interés, mayormente se representa con la letra U mayúscula.



Actividades de Apertura

Imagina a todos los planteles que pertenecen a la UEMSTIS, podemos considerarlo como un conjunto universo, es finito porque tiene un número limitado de planteles, lo podemos considerar como conjunto Universal.

Si hablamos de personas en el planeta tierra podemos considerarlo como conjunto Universal o Conjunto Universo de igual manera porque existen millones de personas en el planeta Tierra.

Existen Conjuntos Universos que están limitados y otros que son infinitos, como el conjunto Universal de las estrellas en el Universo estelar. Entonces podemos observar que el Conjunto Universo puede estar determinado por un límite de elementos o bien de manera ilimitada.



Observa el video y analiza.

https://www.youtube.com/watch?v=L_J0UOf_u5s



En el siguiente ejemplo se presenta el conjunto universo

$$U = \{x/x \text{ es una letra de nuestro alfabeto en México}\}$$

Representa de otra forma el universo anterior, recuerda que puede ser por comprensión y por extensión, desarróllalo en tu libreta.

$$U = \{ \hspace{15em} \}$$



Actividades de cierre

Piensa y escribe en tu libreta, en 5 diferentes universos no muy extensos en los que puedas representarlos por extensión y por comprensión.



6.1.6 Conjunto vacío



Introducción

El conjunto vacío, es el conjunto que no contiene elementos. Se representa con las siguientes expresiones o símbolos:

$$\emptyset \quad \{ \}$$



Actividades de Apertura

Analicemos al conjunto vacío. En esta contingencia, analicemos el mes de mayo de 2020, si te pregunto ¿En este momento cuántos estudiantes están en clases normales? La respuesta será ningún estudiante porque todos están en sus casas realizando sus tareas y trabajos. Podemos afirmar que si le asignamos una letra para determinar el conjunto podemos decir:

$$A = \{ \text{Estudiantes que están en clase en el mes de mayo 2020} \}$$

Este conjunto es vacío

$$A = \{ \}$$



Observa el video y analiza.

https://www.youtube.com/watch?v=L_JOUOf_u5s



Actividades de Desarrollo

Un ejemplo del conjunto Vacío se presenta cuando queremos definir al conjunto de todos los números naturales que sean negativos, es decir: $B = \{x/x < 0, x \in N\}$

Sabemos que los números Naturales se definen como enteros positivos, por lo que en este conjunto no pueden existir negativos, en consecuencia $B = \emptyset$



Actividades de cierre

En un experimento lanzamos un dado, representamos los posibles resultados con los elementos del conjunto R.

$$R = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$F = \{ \text{al lanzar el dado obtengo el número 9} \}$$

¿Cómo es el conjunto resultante?:

Escribe tu propia conclusión sobre el conjunto vacío:



6.2 Operaciones con conjuntos

6.2.1 Unión



Introducción

La unión de conjuntos, consiste en formar un conjunto que contenga todos los elementos de los conjuntos que se unen. Así la unión del conjunto A con el conjunto B es el conjunto que tiene todos los elementos del conjunto A y todos los elementos de B. El símbolo de la unión es \cup de tal manera que, para representar la unión de los conjuntos A y el conjunto B, se representa $A \cup B = B \cup A$



Actividades de Apertura

Cuando se unen dos conjuntos, el nuevo conjunto unión, está formado por los elementos de ambos conjuntos, quiere decir que pertenecen al primer conjunto o al segundo conjunto.

Si considero dos conjuntos A y B como conjuntos se puede definir de la siguiente manera:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=MSxklyHOCvA>



Actividades de Desarrollo

Sean los siguientes conjuntos:

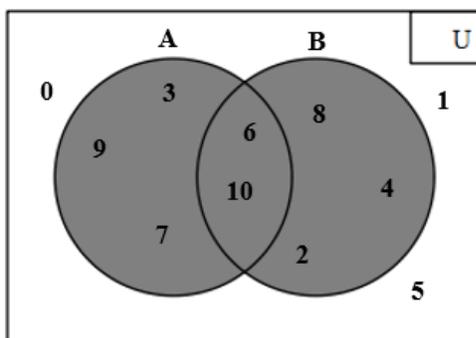
$$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A = \{3,6,7,9,10\}$$

$$B = \{2,4,6,8,10\}$$

Entonces

$$A \cup B = \{2,3,4,6,7,8,9,10\}$$



Esta unión se puede representar mediante un diagrama de Venn- Euler.

$$A \cup B = \{2,3,4,6,7,8,9,10\}$$



Actividades de cierre

Desarrolla en tu libreta el siguiente ejercicio, tu facilitador te proporcionará otros ejercicios para que puedas practicar.

1.- Dados los conjuntos:

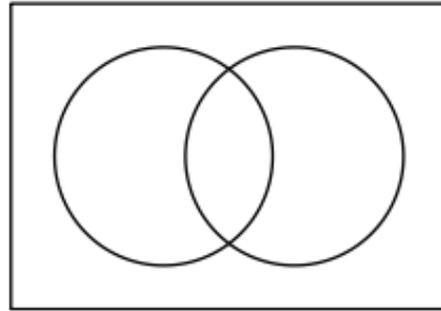
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$$

$$A \cup B = \{ \quad \quad \quad \}$$

Representalo en el diagrama de Venn- Euler



2.- Dado los siguientes conjuntos

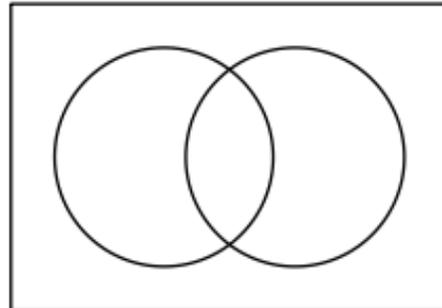
$$U = \{\text{letras del alfabeto}\}$$

$$M = \{a, e, i, o, u\}$$

$$N = \{a, m, e, r, i, c, a\}$$

$$M \cup N = \{ \quad \quad \quad \}$$

Representalo en el diagrama de Venn- Euler





6.2.2 Intersección



Introducción



La intersección de conjuntos, es el conjunto formado con todos los elementos de un conjunto que también pertenecen a otro conjunto, es decir, la intersección del conjunto A con el conjunto B es el conjunto de todos los elementos del conjunto A que pertenecen al conjunto B y viceversa. El símbolo de la intersección es \cap

La intersección se expresa de la siguiente manera $A \cap B$. También se cumple que $A \cap B = B \cap A$



Actividades de Apertura

Cuando tenemos dos conjuntos, ejemplo el conjunto A y el Conjunto B, la intersección de estos dos conjuntos, es un nuevo conjunto en el cual están contenidos los elementos comunes de ambos conjuntos, lo cual quiere decir que están tanto en el Conjunto A y en el conjunto B.

Se puede definir de la siguiente manera:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=11Z2gOSyl7k&t=6s>



Actividades de Desarrollo

Sea los conjuntos:

$$M = \{a, e, i, o, u\}$$

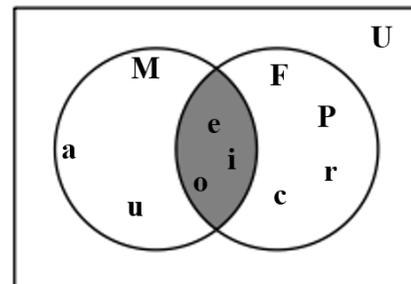
$$F = \{p, e, r, i, c, o\}$$

La intersección de los dos conjuntos es:

$$M \cap F = \{e, i, o\}$$

Se puede representar mediante un diagrama de Venn- Euler.

$$M \cap F = \{e, i, o\}$$





Actividades de cierre

Analiza el siguiente ejercicio y determina el conjunto intersección, puedes trabajar en tu libreta.

1. Sean los conjuntos Universo U y conjuntos A y B .

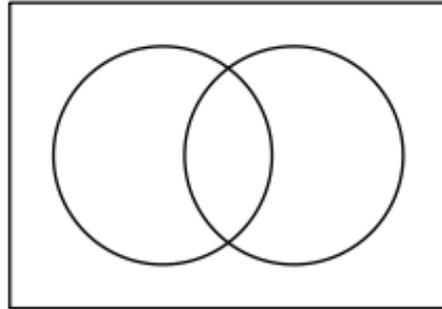
$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

$$A = \{x/x \text{ es un número par}, x \in U\}$$

$$B = \{x/x \text{ es un número impar}, x \in U\}$$

Determina: $A \cap B =$

Y representa su diagrama de Venn- Euler.



2.- Sean los conjuntos Universo U y conjuntos F y G

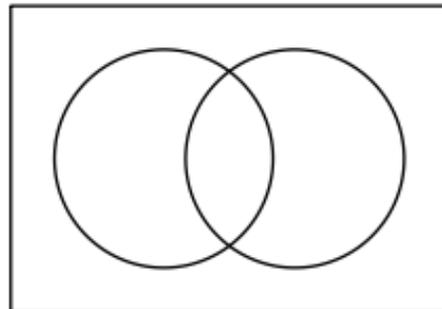
$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, ll, m, n, ñ, o, p, q, r\}$$

$$F = \{a, m, o, r\}$$

$$G = \{p, e, r, o\}$$

Determina: $F \cap G = \{ \quad \quad \quad \}$

Y representa su diagrama de Venn- Euler.





6.2.3 Complemento



Introducción

Sea A un subconjunto, de un conjunto universal U. El complemento del conjunto A, considerando el Universo U, es el conjunto A' o A^c , de todos los elementos del universo U, que no pertenecen al conjunto A.



Actividades de Apertura

El conjunto complemento se refiere a comprender que si en un conjunto ejemplo A, deseamos determinar su complemento, este nuevo conjunto complemento son los elemento que están en el Universo y no pertenecen al conjunto A, se puede definir como se expresa a continuación:

$$A^c = A' = \{x/x \in U \wedge x \notin A\}$$



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=yjRO-1n6OUo>



Sea el conjunto Universo y el conjunto A:

$$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

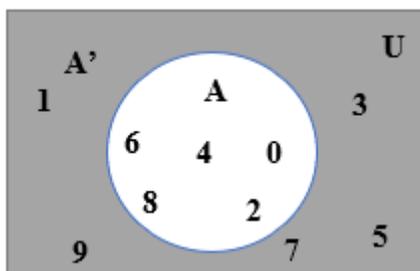
$$A = \{0,2,4,6,8\}$$

Su complemento es:

$$A^c \text{ o } A' = \{1,3,5,7,9\}$$

Esto se puede representar en un diagrama de Venn Euler.

$$A^c \text{ o } A' = \{1,3,5,7,9\}$$





Actividades de cierre

Analiza el siguiente ejercicio y determina el conjunto complemento, puedes trabajar en tu libreta.

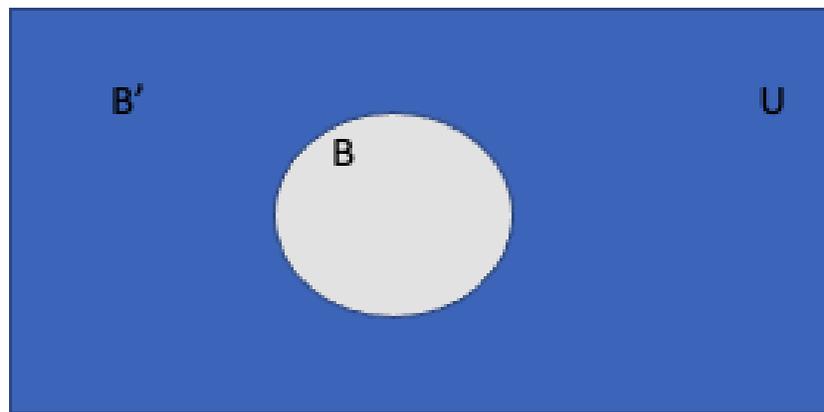
1.- Sean los conjuntos Universo U y conjuntos A y B .

$$U = \{x/0 \leq x \leq 10, x \in N\}$$

$$B = \{2,4,6,8\}$$

Determina el conjunto complemento B' y represéntalo mediante un diagrama de Venn- Euler.

$$B' = \{ \quad \quad \quad \}$$



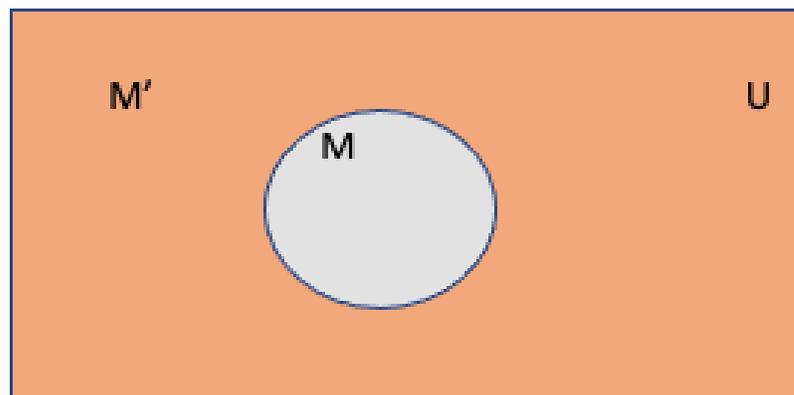
2. Sean los conjuntos Universo y conjunto M .

$$U = \{x/2 < x \leq 8, x \in N\}$$

$$M = \{3,4,5,6,7,8\}$$

Determina el conjunto complemento M' y represéntalo mediante un diagrama de Venn- Euler.

$$M' = \{ \quad \quad \quad \}$$





6.2.4 Diferencia



Introducción

La diferencia entre los conjuntos A y B, se pueden representar de la siguiente manera:

A-B o B-A, que dan lugar a conjuntos diferentes.

A-B es el conjunto de todos los elementos de A que no pertenecen a B, mientras que B-A es el conjunto de todos los elementos de B que no pertenecen al conjunto A.



Actividades de Apertura

Si consideramos al conjunto A y al conjunto B, la diferencia A-B, es el conjunto de elementos de A que no son elementos de B determinándolos de la siguiente manera:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Por el contrario B-A se puede entender de la siguiente manera:

$$B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$$



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=GGLmJityzcw>



Actividades de Desarrollo

Sean los conjuntos

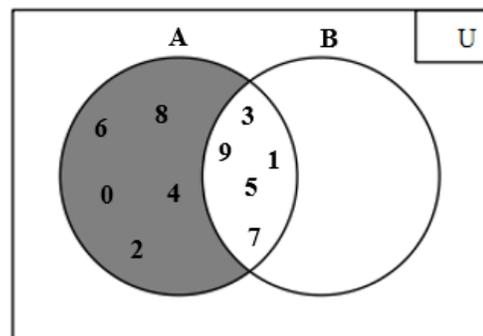
$$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$B = \{1,3,5,7,9\}$$

$$A - B = \{0,2,4,6,8\}$$

Esto se puede representar con un diagrama de Venn-Euler.

$$A - B = \{0,2,4,6,8\}$$





Proponemos otro ejemplo:

Sea el siguiente Universo U , conjuntos M y N .

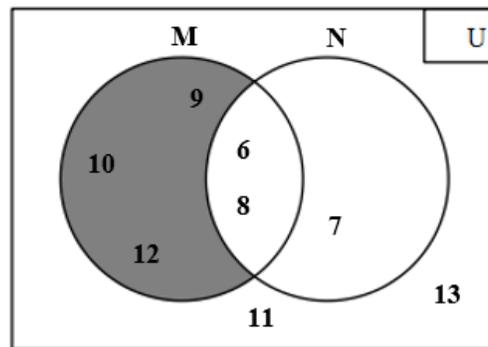
$$U = \{6,7,8,9,10,11,12,13\}$$

$$M = \{6,8,9,10,12\}$$

$$N = \{6,7,8\}$$

$$M - N = \{9,10,12\}$$

$$M - N = \{9,10,12\}$$



Actividades de cierre

Analiza y desarrolla en tu libreta el siguiente ejercicio.

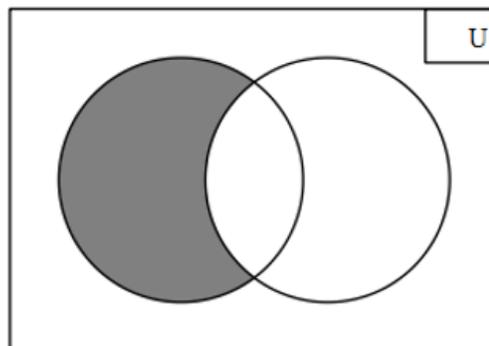
1. Dados los siguientes conjuntos.

$$U = \{\text{letras de nuestro alfabeto}\}$$

$$M = \{a, e, i, o, u\}$$

$$N = \{a, m, e, r, i, c, a\}$$

$$M - N =$$





6.3 Representación de operaciones mixtas con hasta tres conjuntos



Introducción

Para el desarrollo de las operaciones mixtas se requiere que el estudiante domine los temas analizados anteriormente, comprendiendo los elementos y operaciones con conjuntos, puesto que esos elementos básicos permitirán encontrar las soluciones de este tipo de ejercicios.



Actividades de Apertura

En este último tema analizado, nos permitirá observar como podemos trabajar con tres conjuntos diferentes y que tienen algunas similitudes o números, objetos, elementos similares, lo cual nos permitirá poner en práctica todo lo analizado en los temas anteriores.

Aquí podrás poner en juego tu capacidad cognitiva y de orden superior para poder analizar ejercicios que contienen tres conjuntos y donde aparecen varias operaciones de las analizadas anteriormente.

Tu facilitador podrá explicarte con más detalle el tema y podrás realizar otros ejercicios que te permitan desarrollar tu creatividad y capacidad para analizar y proponer ejemplos de este tipo.



Actividades de Desarrollo

Sean los siguientes conjuntos:

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

$$A = \{x/x = 2n - 1, n \in N, x \in U\}$$

$$B = \{x/x \text{ es un número primo}, x \in U\}$$

$$C = \{4,5,6,8,9,11,12\}$$



Realicemos la siguiente operación.

$$B' \cap (C \cup A)' =$$

Este ejercicio lo podemos desarrollar de la siguiente manera:

Retomamos los conjuntos de una manera que se pueda entender mejor.

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

$$A = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

$$B = \{2,3,5,7,11,13\}$$

$$C = \{4,5,6,8,9,11,12\}$$

$$B' \cap (C \cup A)' =$$

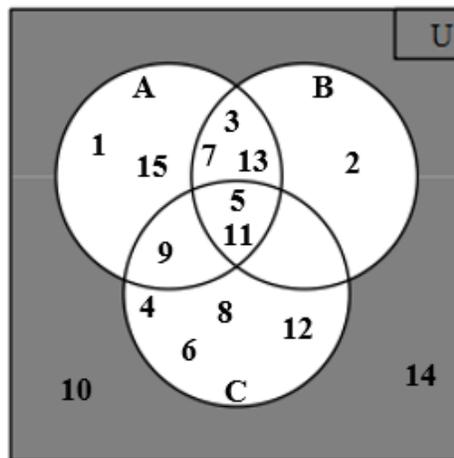
$$B \cap (C \cup A) = \{2,3,5,7,11,13\} \cap \{4,5,6,8,9,11,12\} \cup \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

$$B' \cap (C \cup A) = \{1,4,6,8,9,10,12,14,15\} \cap \{1,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,15\}$$

$$B' \cap (C \cup A)' = \{1,4,6,8,9,10,12,14,15\} \cap \{2,10,14\} = \{10,14\}$$

Diagrama de Venn – Euler.

$$B' \cap (C \cup A)' = \{10, 14\}$$





Actividades de cierre

Con los mismos conjuntos de la explicación anterior, determina las siguientes operaciones y represéntalas en un diagrama de Venn – Euler.

Retomemos nuevamente los conjuntos:

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

$$A = \{1,3,5,7,9,11,13,15\}$$

$$B = \{2,3,5,7,11,13\}$$

$$C = \{4,5,6,8,9,11,12\}$$

a) $A \cup B =$

b) $(A \cap B) \cup C' =$

c) $A' \cap (B \cap C) =$



Bloque 7 | Técnicas de Conteo

7.1 Elementos básicos



Introducción



A las técnicas de conteo también se les conoce como análisis combinatorio; permite determinar el número posible de resultados lógicos que cabe esperar al realizar algún experimento o evento, sin necesidad de enumerarlos todos.

Con frecuencia se presentan problemas en los cuales, por ejemplo, una institución bancaria debe proporcionar a los usuarios una tarjeta de crédito o de débito; una compañía de teléfonos debe asignar a cada suscriptor un número; y un gobierno estatal una placa de circulación para cada vehículo. La solución de este tipo de problemas implica calcular cuántos subconjuntos distintos se pueden formar con un conjunto de números. El sistema elegido, debe ser lo suficientemente amplio para cubrir el número de usuarios previsto.

El sistema elegido, debe ser lo suficientemente amplio para cubrir el número de usuarios previsto.

A cada número, objeto o suceso se le llama *elemento*; a cada colección o grupo de elementos se le identifica como una combinación, y a cada ordenamiento único se le identifica como una *permutación*.

Una **combinación** es un conjunto de elementos diferentes en cualquier orden.

Una **permutación** se caracteriza por el orden de los elementos que la forman.



Actividades de Apertura

Una cafetería indica que con los ingredientes lechuga, tomate, salsa de tomate y cebolla, se puede preparar una hamburguesa, en una de sus 16 formas posibles. ¿Está el anuncio en lo correcto?

Para corroborar la información del anuncio, indica con un Sí que se añade ese ingrediente, o de lo contrario, un No. Utiliza la siguiente tabla:

	Lechuga	Tomate	Salsa	Cebolla
1	Sí	Sí	Sí	Sí
2	Sí	Sí	Sí	No
3	Sí	Sí	No	Sí
4	Sí	Sí	No	No
5	Sí	No	Sí	Sí
6	Sí	No	Sí	No
7	Sí	No	No	Sí
8	Sí	No	No	No
9	No	Sí	Sí	Sí
10	No	Sí	Sí	No
11	No	Sí	No	Sí
12	No	Sí	No	No
13	No	No	Sí	Sí
14	No	No	Sí	No
15	No	No	No	Sí
16	No	No	No	No



Si con esos cuatro ingredientes puede prepararse la hamburguesa en 16 formas distintas, ¿de cuántas formas podría prepararse si hubiera 10 ingredientes disponibles? ¿Es necesario enumerarlos para saber de cuántas formas pueden prepararse una hamburguesa?



Actividades de Desarrollo

1. Revisa la imagen y responde lo que se plantea a continuación:



- a) ¿De cuántas maneras distintas se pueden acomodar las prendas?
 - b) ¿De cuántas maneras distintas pueden combinarse las prendas si se las pone un compañero?
2. Supongamos que un restaurante ofrece 5 entradas, 4 platos principales y 3 postres. ¿De cuántas formas un cliente puede ordenar una comida?
 3. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 personas en una banca, si hay 4 espacios disponibles?
 4. En una clase de 10 alumnos, se van a distribuir 10 premios. ¿De cuántas formas puede hacerse si los premios son diferentes?
 5. Encuentra el número de distintos grupos de tres personas que se pueden formar, a partir de un grupo de 10 personas.
 6. Calcula cuántos números enteros diferentes de tres dígitos se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 si no pueden repetirse.
 7. Tu madre desea obsequiarte una laptop y una mochila para tu cumpleaños. Visitan a un distribuidor de equipos de cómputo; revisan cinco modelos de laptops (A, B, C, D, E) y 10 modelos de mochilas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). ¿De cuántas formas se puede elegir el par de artículos?
 8. Si en casa tienes cuatro objetos para decorar cada una de las esquinas de tu sala; determina de cuántas maneras distintas se pueden acomodar los adornos, para que sean vistos.



Actividades de cierre

Diseñar un Muestrario en Papel Opalina utilizando los colores como elementos de insumo, 7 colores básicos (rojo, verde, amarillo, azul, rosado, naranja, negro).

El muestrario será conformado con agrupaciones No ordenadas de 3 colores, mismos que no deberán repetirse en grupos siguientes.



7.1.2. Espacio muestral, evento y diagrama de árbol



Introducción



El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se conoce como **espacio muestral**; cada uno de ellos es un **punto muestral** y el resultado que obtenemos o esperamos obtener al realizar una o varias veces el mismo experimento es un **evento o suceso**.

Los **eventos** se clasifican en dos: **Evento elemental o simple**: Es conjunto formado por un solo resultado. **Evento compuesto**: Es el conjunto formado por dos o más posibles resultados. Si el experimento se repite dos o más veces, el número de resultados posibles cambia notoriamente al igual que la naturaleza de los puntos muestrales. Veamos.

Ejemplo: Determinamos el espacio muestral resultante de echar dos volados.

Solución: se trata de un experimento formado por dos repeticiones del mismo tipo: echar un volado. Pensando un poco, encontramos que los resultados posibles pueden ser 2 águilas, 1 águila y 1 sol, 1 sol y un águila, 2 soles. Usando las iniciales correspondientes, podemos anotar este espacio muestral como sigue:

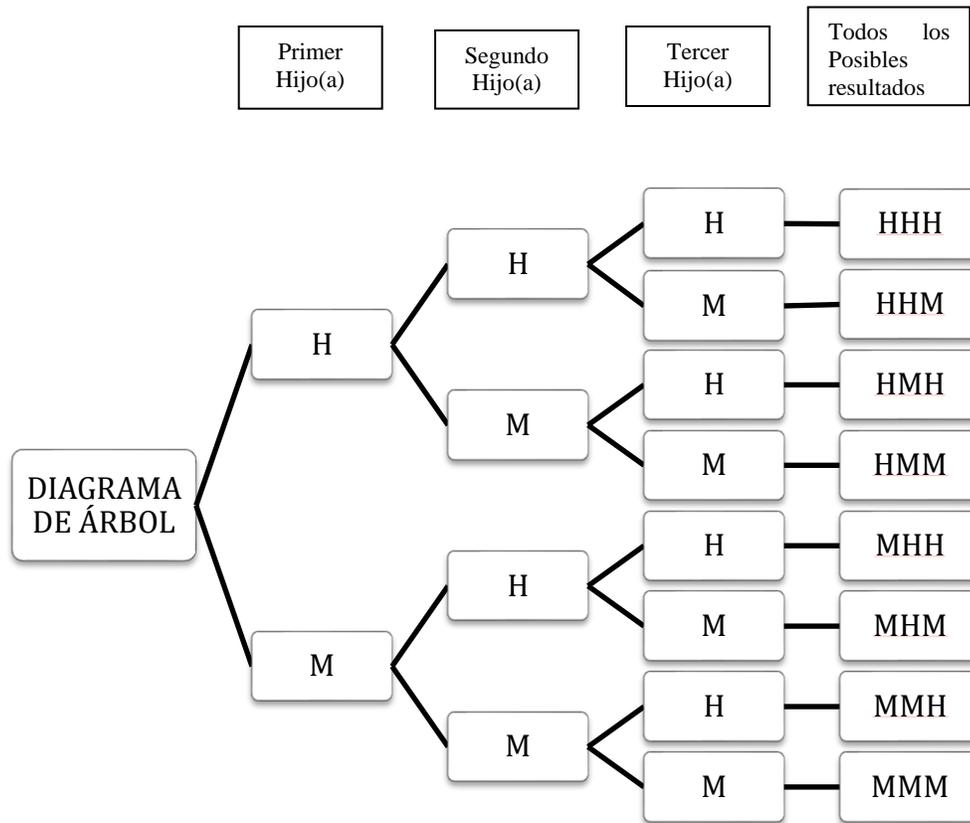
(**AA, AS, SA, SS**) Como acabamos de ver, la determinación del espacio muestral de experimentos que implican una o dos repeticiones de su tipo, como echar uno o dos volados, tirar dos veces un dado, planear tener dos hijos, es muy fácil ya que basta una simple inspección. No obstante, cuando se quiere conocer a todos los resultados posibles de una serie de experimentos o repeticiones del mismo tipo, en el cual los puntos muestrales son necesariamente eventos conjuntos, esa facilidad desaparece rápidamente y se torna más y más difícil a medida que se alarga la serie. Por fortuna, para resolver estos casos existe una técnica conocida como:

DIAGRAMA DE ÁRBOL, cuya aplicación conduce metódicamente al espacio muestral que se quiere conocer. Explicaremos en que consiste recurriendo a un ejemplo.



Ejemplo; Se nos informa que una pareja planea procrear tres hijos. ¿De cuántas maneras diferentes puede suceder este hecho? En otras palabras: ¿Cuál es el espacio muestral del experimento “procrear 3 hijos”?

Solución: Sea H el evento “ser Hombre” y M el evento “ser Mujer”. Es evidente que el primer hijo puede ser tanto de un sexo como del otro; las dos ramas primarias de la figura siguiente ilustran la situación. Para el segundo y el tercer hijo, la posibilidad de cualquiera de los dos sexos sigue siendo la misma; en consecuencia, de cada rama primaria se desprenden dos secundarias y, de cada secundaria, dos terciarias con lo cual se termina el diagrama necesario para resolver el problema.





7.2 Principio fundamental de la multiplicación



Introducción

El **principio fundamental de conteo** establece que si hay “ p ” formas de hacer una cosa, y “ q ” formas de hacer otra cosa, entonces hay “ $p \times q$ ” formas de hacer ambas cosas, (resultados posibles del experimento). El **principio de conteo** puede extenderse a situaciones donde tenga más de 2 opciones, por ejemplo, si hay “ p ” formas de hacer una cosa, “ q ” formas para una segunda cosa, y “ r ” formas de hacer una tercera cosa, entonces hay “ $p \times q \times r$ ” formas de hacer las tres cosas.



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=u6qc-hglUcq>



Ejemplo 1.

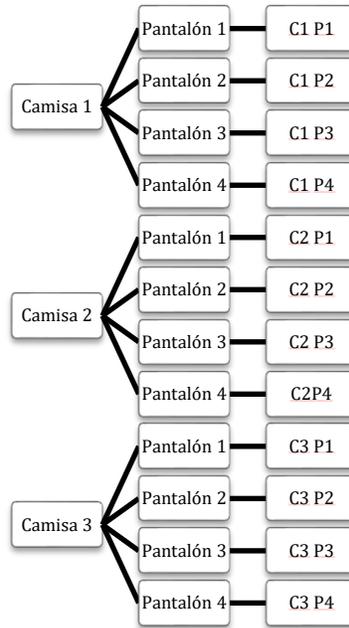
Silvia tiene 3 camisas (Blusas), llamémoslas C_1, C_2, C_3 , y 4 pantalones, (llamémoslos P_1, P_2, P_3, P_4). Entonces Silvia puede hacer, $3 \times 4 = 12$ combinaciones posibles:

$C_1P_1, C_1P_2, C_1P_3, C_1P_4$

$C_2P_1, C_2P_2, C_2P_3, C_2P_4$

$C_3P_1, C_3P_2, C_3P_3, C_3P_4$

Esta ordenación puede ilustrarse con un “diagrama de árbol” como se muestra en la figura siguiente:



Ejemplo 2.

Suponga que lanza un dado de 6 lados y elige una ficha de domino de 28 piezas.

Solución. Hay 6 resultados posibles con el dado, y 28 resultados posibles con el grupo de piezas del domino, así, hay un total de $6 \times 28 = 168$ resultados posibles del experimento, ¿será práctico elaborar el diagrama de árbol para saber el número de resultados posibles?

Ejemplo 3.

Suponga que lanza un dado de 6 lados y elige una ficha de domino de 28 piezas, al mismo tiempo se tira un volado (se arroja una moneda al aire). ¿Cuántos resultados posibles existen?

Solución. Hay 6 resultados posibles con el dado, y 28 resultados posibles con el grupo de piezas del domino y dos resultados posibles para la moneda, así, hay un total de $6 \times 28 \times 2 = 336$ resultados posibles del experimento, nuevamente la pregunta podría ser ¿será práctico elaborar el diagrama de árbol para saber el número de resultados posibles?



Ejemplo 4.

¿Cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse con los dígitos 1, 3, 5, 7, 9?

Solución. El primer evento es seleccionar el primer dígito, el segundo evento es seleccionar el segundo dígito y el tercer evento es seleccionar el tercer dígito. Hay 5 maneras de seleccionar el primer dígito, y para cada manera de seleccionar el primero habrá 4 maneras de seleccionar el segundo dígito (pues de los 5 dígitos que disponemos, ya usamos 1 y nos quedan 4), y por cada una de esas maneras habrá 3 maneras de seleccionar el tercer dígito (pues de los 5 dígitos que disponemos, ya usamos 2 y nos quedan 3), entonces, hay $5 \times 4 \times 3 = 60$ números que podemos formar.

En los ejemplos anteriores del principio de multiplicación, del enunciado se deducen fácilmente los eventos y la cantidad de resultados posibles para cada uno, lo que hace que apliquemos el principio de multiplicación directamente, casi con los ojos cerrados y como si fuera una fórmula. Sin embargo, habrá situaciones un poco más complejas donde el principio de la multiplicación no se aplique directamente. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.

¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos hay? Nota: Un número capicúa es aquel que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo 12321 y 72227.

Solución. Como se puede observar, el enunciado no nos habla de eventos que se realizan, ni mucho menos de la cantidad de posibles resultados para cada evento. Lo primero será razonar un poco sobre el ejercicio y ver a dónde nos lleva: Si tenemos un número de 5 cifras que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda entonces el 1er y 5to dígito deben ser iguales, de la misma forma el 2do y 4to dígito son iguales, y el 3er dígito puede ser lo que sea (pues ocupa la misma posición de izquierda a derecha que de derecha a izquierda); entonces basta con elegir los primeros tres dígitos de nuestro número (y el 4to y 5to dígito los igualamos al 2do y 1er dígito respectivamente) para formar un número capicúa de 5 dígitos.

Este razonamiento ya nos deja ver los eventos que debemos considerar: el primer evento es elegir el 1er dígito, el segundo evento es elegir el 2do dígito, y el tercer evento es elegir el 3er dígito. Hay 9 formas de elegir el primer dígito (los dígitos del 1 al 9, el 0 no, porque no sería un número de 5 dígitos, por ejemplo 02620 no es válido), y por cada una de estas formas hay 10 formas de elegir el 2do dígito (los dígitos del 0 al 9), y por cada una de estas hay 10 formas de elegir el 3er dígito (los dígitos del 0 al 9), así, hay un total de $9 \times 10 \times 10 = 900$ números capicúas de 5 dígitos.

Es importante notar lo siguiente: para poder hacer uso del principio de multiplicación es necesario que de los eventos que estemos considerando, para cada uno de los resultados de un evento, la cantidad de opciones del siguiente evento sea la misma. Por ejemplo, en el del ejemplo 1, la selección de la camisa no altera la cantidad de opciones de pantalón, pues para cada camisa de entre las 3 que hay, siempre habrá 4 posibles pantalones, haciendo entonces que haya $4+4+4=3 \times 4 = 12$ combinaciones.



¿Qué pasa entonces si, en el Ejemplo 1, añadimos la restricción de que la primera camisa no se ve bien con 2 de los 4 pantalones y que por lo tanto no debemos considerar esas combinaciones? No podemos usar solo el principio de multiplicación, pues si la camisa seleccionada es la primera entonces hay 2 opciones de pantalón, y si la camisa seleccionada es cualquiera de las otras 2 entonces hay 4 opciones de pantalón, así, habrá en total $1 \times 2 + 2 \times 4 = 10$ combinaciones. Lo que hicimos entonces fue dividir en dos casos el problema, cuando la primer camisa era seleccionada y cuando no, y para cada caso resolvimos el total de combinaciones usando el principio de multiplicación, y después usamos el **principio de la suma** para llegar a que la respuesta es $1 \times 2 + 2 \times 4 = 10$.

A continuación, presentamos de forma detallada el principio de la suma.

7.3 Principio fundamental de la suma



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=u6gc-hglUcg>



Si un evento «A» se puede realizar de «m» maneras diferentes, y otro evento «B» se puede realizar de «n» maneras diferentes, además, **si ocurre uno no puede ocurrir el otro**, (son mutuamente excluyentes) entonces, el evento A o el evento B, se realizarán de $m + n$ formas. Es decir, aquí ocurre A u ocurre B. El «o» indica suma.

Ejemplo 6: ¿De cuántas formas se puede ir de la ciudad “A” hasta la ciudad “B” sabiendo que se dispone de 3 autos diferentes y 4 trenes distintos? El viaje se puede realizar en auto o en tren.

Solución: Dado que el viaje se puede realizar en auto o en tren, se tienen $3 + 4 = 7$ opciones diferentes para ir de la ciudad “A” hasta la ciudad “B”.

Ejemplo 7: ¿Cuántos resultados se pueden obtener si se lanza un dado o una moneda?

Solución: Es evidente que al lanzar un dado se tienen seis resultados posibles, y al lanzar una moneda, se tienen 2 resultados posibles, por lo tanto:

El número de resultados posibles es $2 + 6 = 8$



Ejemplo 8: ¿Cuántos números pares de 2 cifras empiezan con 1 o 2?

Nota: el cero se considera par

Solución: Los que inician con uno son (12, 14, 16, 18, 10) más los que inician con 2 son, (22, 24, 26, 28, 20) en total son 10 números.

En los ejemplos anteriores, se deduce fácilmente cuáles son los eventos y de cuántas formas pueden ocurrir cada uno. Sin embargo, habrá situaciones más complejas donde seremos nosotros quienes determinamos los eventos a considerar, los cuales deben cumplir con que son excluyentes y que dichos eventos cubran todos los posibles casos. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 9:

Eliseo planea ir de la ciudad A a la ciudad B y de ahí a la ciudad C, cada uno de los 2 viajes puede hacerlo en camión, tren, auto o avión, pero con la condición de que al menos 1 de los viajes sea en avión, para no cansarse tanto. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Solución:

Podemos dividir en dos eventos: Eliseo viaja de A a B en avión, o no viaja de A a B en avión. Si se va de A a B en avión, entonces hay 4 formas de completar su viaje (avión-tren, avión-camión, avión-auto, avión-avión), y si no se va de A a B en avión entonces hay 3 formas de completar su viaje (tren-avión, camión-avión, auto-avión), en total son $4+3=7$ formas de completar su viaje. Nótese que aquí fuimos nosotros quienes determinamos los eventos a considerar, los cuales son excluyentes y cubren todos los posibles casos

En muchas ocasiones, como se mencionó al final de la sección del principio de multiplicación con un ejemplo, habrá problemas en los que ambos principios sean utilizados en conjunto para poder resolverlos, veamos otro ejemplo:

Ejemplo 10

Eliseo planea un nuevo viaje, ahora irá de la ciudad A a la ciudad B, luego a la ciudad C y finalmente a la ciudad D, puede hacerlo en camión, tren, auto o avión, pero con la condición de que a lo más 1 de los 3 viajes sea en avión, pues ya no tiene tanto dinero. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?



Solución:

Como tenemos una restricción, primero hay que dividir en eventos excluyentes que juntos consideren todos los posibles casos (para después sumarlos usando el principio de la suma), y para cada uno de estos eventos encontraremos el total de posibles viajes usando el principio de multiplicación. O bien ningún viaje es en avión, o bien uno de ellos es en avión, entonces los eventos que consideramos son los siguientes: el primero es que ninguno de los viajes se hace en avión, el segundo es que solo el viaje de A a B se hace en avión, el tercero es que solo el viaje de B a C es en avión, y el cuarto es que solo el viaje de C a D se hace en avión. Si ningún viaje es en avión, cada uno de los 3 viajes se hace en camión, tren o auto y usando el principio de multiplicación hay $3 \times 3 \times 3 = 27$ formas de hacerlo. Si se viaja de A a B en avión, entonces hay 3 formas de viajar de B a C y 3 formas de viajar de C a D, es decir, $3 \times 3 = 9$ formas. Análogamente, si solo se viaja en avión de B a C hay $3 \times 3 = 9$ formas, y si solo se viaja en avión de C a D hay $3 \times 3 = 9$ formas. Ahora, por el principio de la suma, las maneras totales en que Eliseo puede viajar son $27 + 9 + 9 + 9 = 54$ formas.

7.3.1 Notación factorial

Sea n , un número entero y positivo, entonces el factorial de n , que se simboliza $n!$ y se lee “ n factorial”, es el producto de todos los enteros positivos desde 1 hasta n . Así.

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Obsérvese que $5! = 5 \times 4!$

$$\begin{aligned} &= 5 \times 4 \times 3! \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2! \\ &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1! \end{aligned}$$

Por definición: $0! = 1! = 1$

7.3.1.1 operaciones con factoriales, combinaciones y permutaciones



Actividades de Apertura

Definimos una combinación, como un acomodo de “ n ” objetos diferentes, en subconjuntos de “ r ” elementos, (con $n \geq r$) en donde el orden en que están dispuestos los objetos, no importa.

La notación factorial es útil cuando se trata de calcular el número de posibles combinaciones o permutaciones para un evento dado.



Ejemplo 11: Se tienen 3 colores diferentes (por ejemplo, Verde, Amarillo y Café) y se desea saber ¿cuántas combinaciones diferentes de 2 colores son posibles?

Solución: Las combinaciones se pueden calcular “a píe”, del siguiente modo Verde-Amarillo, Verde-Café, Amarillo-Café, son tres posibilidades, es muy importante hacer notar que este resultado se podría calcular utilizando la siguiente fórmula para combinaciones:

$${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo 12. Seleccionar dos platillos de verduras de un menú en el que hay que cinco opciones diferentes.

Solución: ${}_5 C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2!(3)!} = 10$

Ejemplo 13. De un grupo de 9 personas, se van a seleccionar 3, para experimentar una nueva vacuna contra el coronavirus, ¿Cuántos grupos diferentes de tres personas se pueden formar?

Solución: ${}_9 C_3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3!(6)!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

7.4 Combinaciones y Permutaciones



Observa el video y analiza.

<https://www.youtube.com/watch?v=DhOeAPRXGxM>



Actividades de Desarrollo

Analiza los siguientes ejemplos:

Esta fórmula sirve para calcular el número de combinaciones con un total de “n” objetos en subgrupos de “r” y se lee del siguiente modo “n en r” y se simboliza de la siguiente forma:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

para el ejemplo anterior n = 3 colores y r = 2, (grupos de dos en dos).

Utilizando la fórmula ${}_3 C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 (1)} = \frac{6}{2} = 3$

Es probable que hasta este punto pueda parecer trivial esta fórmula, sin embargo, resulta de extraordinaria utilidad cuando se trata de resolver situaciones como la siguiente:



Ejemplo 14: ¿Cuántas combinaciones de tres colores diferentes se pueden formar, si se tienen 10 colores disponibles?

Solución: Utilizando nuestra fórmula ${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_{10} C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} =$
 $= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! (10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{3! (7)!}$ cancelando términos 7! del numerador con 7! del
denominador, $= \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$ combinaciones posibles



Actividades de cierre

Resuelva los siguientes problemas propuestos:

1. Con las 5 vocales, ¿cuántos grupos de 3 letras podemos formar?, teniendo en cuenta que ninguna letra se puede repetir y que el orden no importa.
2. De un grupo de 10 alumnos se seleccionan 5 para jugar en el equipo de basquetbol ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar? (considere que todos pueden jugar en cualquier posición).
3. En una final de futbol se seleccionan 5 jugadores de un equipo para el lanzamiento de penaltis. ¿Cuántos grupos diferentes se podrían formar?
4. En una carrera de caballos con 9 participantes tienes que elegir a los 3 caballos ganadores (no importa el orden de llegada). ¿Cuántos posibles resultados podrían darse?
5. Calcular el número de combinaciones de 8 elementos tomados de 4 en 4.
6. En una clase de 50 alumnos se quiere elegir un comité formado por tres alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?
7. En una bodega hay siete tipos diferentes de vinos. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro?
8. ¿Cuántas diagonales tiene un hexágono y cuántos triángulos se pueden formar con sus vértices?
9. A una fiesta asisten 12 personas y se intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado?



7.4.1 Permutaciones



Actividades de Apertura



Supón que tienes tres cifras diferentes, por ejemplo 1, 2, 3, ¿Cuántos números diferentes de dos cifras se pueden formar, sin que haya dos cifras iguales? La respuesta se puede ilustrar como sigue, 12, 13, 23, 21, 31, 32, claramente se entiende que 12 o 21, son dos números diferentes y cuenta como dos posibilidades distintas, esa es la diferencia respecto a las combinaciones, en combinaciones el orden no es relevante, en permutaciones el orden si es importante.

El número de permutaciones de un subconjunto de “r” elementos seleccionados de

un conjunto de “n” elementos diferentes, está dado por: ${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ algunos autores la expresan

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Si deseamos utilizar la fórmula para el ejemplo anterior

$${}_3 P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$



Actividades de Desarrollo

Analiza el siguiente ejemplo:

Ejemplo 15: ¿De cuántas formas diferentes es posible agrupar las cifras 1, 2, 3, en grupos de tres?

Solución: 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Lo anterior también podría enunciarse como ¿Cuántos números diferentes de tres cifras pueden formarse con los números 1, 2 y 3?

Utilizando la fórmula ${}_3 P_3 = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Recuerda que el factorial de cero se define igual a 1 ($0! = 1$)



Actividades de cierre

Resuelva los siguientes problemas propuestos:

1. ¿Cuántas banderas diferentes, de tres franjas horizontales de igual ancho y de colores distintos, pueden confeccionarse a partir de siete colores diferentes?
2. Una tienda de pinturas requiere diseñar muestrarios de los colores que vende, colocándolos en una fila de 5 lugares; si tienen 4 verdes diferentes, 5 amarillos diferentes, 2 azules diferentes y 3 rosados diferentes, calcula el número de muestrarios diferentes que se pueden diseñar si:
 - a) No hay restricción alguna
 - b) El primer color debe ser azul
 - c) El primero y el último deben ser verdes
3. Con todas las letras de la palabra DISCO, ¿Cuántas “palabras” distintas se pueden formar?
4. Un grupo de cuatro matrimonios asiste al teatro, calcula cuántas son las maneras como pueden sentarse en una fila si:
 - a) No existe restricción alguna
 - b) Los y las mujeres deben quedar alternados
5. La directiva de una asociación civil deberá tomarse una fotografía en la cual aparezcan sentados en fila, sus cinco directivos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse los cinco directivos?
6. El gobierno de un Estado de la Federación, decide cambiar las placas de circulación de los automóviles particulares. Para ello, se considera incluir dos letras distintas del alfabeto, seguidas de tres dígitos distintos del 0 al 9 inclusive. ¿Cuántas placas podrían fabricarse con estas características?
7. Un funcionario de un Banco decide que los números de las tarjetas de crédito se cambien, de manera que no se repitan las letras o los números de cada una; mismas que incluirán dos letras del alfabeto, seguidas de cuatro dígitos. Calcula el número de tarjetas que se podrían fabricar.
8. Calcula el número de permutaciones diferentes que se pueden formar con las letras A, B, C, D, E, F que contengan 3 letras cada una.
9. Para tu clase de Literatura debes leer 3 libros en el semestre. Si tienes en casa 12 libros de distintos autores que te pueden interesar, determina de cuántas formas se pueden seleccionar los 3 libros.
10. Cuatro libros distintos de matemáticas, seis diferentes de física y dos diferentes de química se colocan en un estante. De cuántas formas distintas es posible ordenarlos si:
 - a) Los libros de cada asignatura deben estar todos juntos.
 - b) Solamente los libros de matemáticas deben estar juntos



7.5 Teorema de Bayes



Introducción



En la vida cotidiana, tomamos muchas decisiones basándonos en información de conocidos, medios de comunicación, entre otros. Cuando decidimos que queremos comprar un teléfono celular, una motocicleta u otro artículo, lo hacemos considerando la fiabilidad, durabilidad o rendimiento de una marca. En la mayoría de casos desconocemos que estos artículos se producen en diferentes plantas en el mundo, cada instalación tiene sus propias estadísticas de calidad.

Cuando nuestro papá decide comprar un auto Toyota Corolla 2012, porque su hermano en Estados Unidos tiene uno y es excelente, no sabe que el auto que él comprará fue fabricado en Brasil, con especificaciones distintas al de su hermano fabricado en Canadá.



El Teorema de Bayes trata de establecer la probabilidad de que ocurra cierto evento (Auto sin fallas), considerando la ocurrencia de otro evento previo (Fabricado en Canadá o Brasil). El análisis y cálculo de estas probabilidades nos permiten tomar mejores decisiones.



Actividades de Apertura



Imagina que para recabar fondos y pagar la graduación, un grupo de alumnos decide, hornear y vender mantecadas. Fátima pertenece a este grupo y sabe mucho de pastelería, pero no puede hacer todos los panes, por lo que algunos de sus compañeros se ofrecen a cocinarlos en su casa con la receta y recomendaciones de Fátima. Como es lógico, no a todos los alumnos les saldrán mantecadas perfectas. Si te dieran a escoger ¿Comprarías una de las mantecadas de Fátima o de otros de sus compañeros?, ¿Crees que el porcentaje de mantecadas casi perfectas será igual para todos los alumnos, aunque sea la misma receta? Socializa las opiniones y argumentalas.

Teorema de Bayes

Las particiones son varios eventos A_1, A_2, \dots, A_n , que forman un espacio muestral S , el teorema de Bayes combina al evento S con otro evento B por medio de la probabilidad condicional quedándonos la siguiente formula.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n)}$$



Observa el video y analiza.
<https://youtu.be/c0r5-52fwM>



Ejemplo 1: Tres plantas de autos A, B y C producen respectivamente 50%, 30% y 20% del número total de autos de una marca, los porcentajes de desperfectos en estas plantas son 3%, 4% y 5%, si se selecciona al azar un auto, hallar la probabilidad de: (a) que el auto sea defectuoso de la planta A y (b) este mismo auto no sea defectuoso de la planta C.



Solución:

El 50% de autos producidos en la planta A se escribe en forma decimal como 0.5, y el porcentaje de autos con desperfectos de esa planta es de 3%, o sea 0.03. Por lo anterior, el producto $(0.5 \cdot 0.03)$ hace referencia a la planta A. para las demás plantas es similar.



Autos defectuosos de la planta A.

$$a) P(A|B) = \frac{0.5 * 0.03}{(0.5 * 0.03) + (0.3 * 0.04) + (0.2 * 0.05)} = \frac{0.015}{0.037} = 40.54\%$$

Cuando nos solicitan el porcentaje de autos SIN desperfectos, debemos usar el complemento para llegar al 100%, es decir, si la planta C produce un 5% de autos defectuosos, producirá un 95% de autos NO defectuosos. Por lo anterior, para la planta C usaremos $(0.2 * 0.95)$. Para las demás plantas es similar el proceso.

Autos NO defectuosos de la planta C.

$$b) P(A|B) = \frac{0.2 * 0.95}{(0.5 * 0.97) + (0.3 * 0.96) + (0.2 * 0.95)} = \frac{0.19}{0.963} = 19.73\%$$

Ejemplo 2: En cierta escuela 4% de los hombres y 1% de las mujeres miden 1.80 metros o más, además 40% de los estudiantes son hombres, ahora bien, si se selecciona un estudiante al azar y mide más de 1.80 m, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución: El 1% de las mujeres miden 1.80 m o más, por lo que se escribe en forma decimal como 0.01, si el 40% de los estudiantes son hombres, el 60% del estudiantado será mujer, es decir trabajaremos con el producto $(0.6 * 0.01)$ para hacer referencia a las mujeres que cumplan las condiciones señaladas, para los hombres es similar.

Mujeres que miden 1.80 m o más.

$$P = (A|B) = \frac{0.6 * 0.01}{(0.4 * 0.04) + (0.6 * 0.01)} = \frac{0.006}{0.022} = 27.27\%$$



Actividades de cierre

Cuando vayamos a realizar compras de artículos diversos, deberíamos incorporar varios criterios como son: calidad, relación costo-beneficio, durabilidad, pertinencia, uso que le daremos, opinión de expertos, etc.

Entre mayor sea el costo del artículo que vamos a adquirir o seleccionar, mayor deberá ser la cantidad de tiempo invertido en la investigación y valoración de las características del producto y sus posibles alternativas.



Existen muchas agencias gubernamentales e independientes que hacen estudios de calidad de variados productos, pero no sirven de mucho si nosotros no las consultamos. Algunos ejemplos:



EJERCICIO 1: Un equipo de fútbol se conforma de cuatro líneas de jugadores: portero (9%), defensas (37%), medios (27%) y delanteros (27%), donde los goles anotados por el equipo en cada línea son: portero 1 gol, defensas 11 goles, medios 15 goles y delanteros 23. Supongamos que en un partido se gana por un gol. ¿Qué probabilidad hay de que éste fuera anotado (a) por la defensa, (b) por los medios y (c) por los delanteros?

Total de goles = ____ + ____ + ____ + ____ = ____

% goles anotados por:	Portero	=	____ / ____	=	_____ %
	Defensas	=	____ / ____	=	_____ %
	Medios	=	____ / ____	=	_____ %
	Delanteros	=	____ / ____	=	_____ %

Probabilidad de que un gol fuera anotado por LA DEFENSA

a) $P(A|B) =$ _____ = _____ %

Probabilidad de que un gol fuera anotado por LOS MEDIOS

b) $P(A|B) =$ _____ = _____ %

Probabilidad de que un gol fuera anotado por LOS DELANTEROS

c) $P(A|B) =$ _____ = _____ %



EJERCICIO 2: A un congreso asisten 100 personas de las cuales 65 son hombres y 35 mujeres, se sabe que el 10% de los hombres y el 6% de las mujeres tienen estudios a nivel maestría. Si se selecciona un maestro al azar, ¿qué probabilidad existe de que sea (a) mujer y (b) hombre?

Probabilidad de que un asistente con grado de maestría sea MUJER

a) $P(A|B) =$ _____ = _____ %

Probabilidad de que un asistente con grado de maestría sea HOMBRE

b) $P(A|B) =$ _____ = _____ %



Fuentes consultadas

Lind, D. A., Marchal, W. G., & Wathen, S. A. (2008). *Estadística aplicada a los negocios y a la economía*. Mc Graw Hill.

Rivera Castillo, M. (2014). *Probabilidad y estadística*. Gafra.

Márquez, E.M.A. (2007). Probabilidad y Estadística. SEP. CFE. COLECCIÓN DGETI. México D.F.

Garza Olvera, B. (2014). Estadística y Probabilidad. Ed. Pearson.



Directorio

Dr. Rafael Sánchez Andrade

Jefe de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial y de Servicios

Ing. Luis Miguel Rodríguez Barquet

Director Académico de Innovación Educativa

Mtra. Laura Leal Sorcia

Subdirectora de Innovación Académica

MC Gerardo Valdés Bermudes

Presidente de la Academia Nacional de Matemáticas de la DGETI

MC Luis Manuel Guerra Franco

Secretario de la Academia Nacional de Matemáticas de la DGETI

MC Óscar Villalpando Barragán

Coordinador de la Mesa de trabajo de Probabilidad y Estadística

ME Omar Eduardo De la Torre Aldama

Edición de la obra

MC Gerardo Valdés Bermudes

Edición de la obra

Ing. Norma Patricia Hernández Tamez

Edición de la obra



Academia Nacional de Matemáticas

Integrantes de la Academia Nacional de Matemáticas que participaron en la elaboración de la obra.

Nombre	Plantel	Estado
Juan Carlos Díaz Puga	CBTIS 39	Aguascalientes
José Antonio Hirata Moyeda	CBTIS 140	Baja California
José Luis Colorado Betanzos	CBTIS 69	Baja California Sur
Ana Maria García Zuñiga	CETIS 2	Ciudad de México
Loan Alejandra Servin Rodríguez	CETIS 52	Ciudad de México
Brillante Zavala Centeno	UAC	Campeche
Yudibeth Sánchez Castellanos	CETIS 138	Chiapas
Miguel Angel Peña Ogaz	CBTIS 228	Chihuahua
Omar Eduardo De la Torre Aldama	CETIS 83	Coahuila
Felipe de Jesús Navarro Camacho	CBTIS 157	Colima
J. Armando Quezada López	CBTIS 89	Durango
Marcos Belisario González Loria	CBTIS 160	Estado de México
David Fernando López López	CBTIS 172	Guanajuato
Jesús Eugenio Ruiz Flores	CBTIS 60	Guanajuato
Eduardo Tomás Torres	CBTIS 178	Guerrero
Emilio Jaime Mendoza Gómez	CBTIS 199	Hidalgo
Eliseo Santoyo Teyes	CBTIS 226	Jalisco
Oscar Villalpando Barragán	CBTIS 12	Michoacán
Andrea Casillas Macías	CBTIS 94	Michoacán
Luis Manuel Guerra Franco	CBTIS 76	Morelos
Lucía Sánchez Ramos	CBTIS 74	Nuevo León
Eva Cruz Brena	CBTIS 183	Oaxaca
Julio Alberto González Negrete	CBTIS 86	Puebla
Gilmer de Jesús Pat Sánchez	CBTIS 111	Quintana Roo
Gerardo Valdés Bermudes	CBTIS 224	Sinaloa
Martín Vega Gómez	CETIS 128	Sonora
Eva María Sánchez Luna	CBTIS 249	Tabasco
Norma Patricia Hernández Tamez	CBTIS 007	Tamaulipas
Miguel Constantino Hernández Pérez	CETIS 132	Tlaxcala
Miguel Ángel Pavón Cordero	CBTIS 48	Veracruz
Silvia Leonor Martínez Quijano	CBTIS 80	Yucatán
Efraín Reyes Cumplido	CBTIS 104	Zacatecas



-
- ⁱ MARQUEZ, E.M.A.(2007).Probabilidad y Estadística. SEP.CFE.COLECCION DGETI. México D.F.
ⁱⁱ Márquez Elías, M.A.(2007). Probabilidad y Estadística. DGETI.SEP.